

Dr. sc. Safet Penjić
Dr. sc. Hermina Alajbegović
Dr. sc. Almir Huskanović

NEKE OSOBINE PARAMETARA CDRG-GRAFOVA ¹²³

Sažetak

CDRG-grafove smo uveli kao novu klasu grafova u radu „Konstrukcije dvostruko regularnih grafova“ koji je objavljen u Zborniku radova Filozofskog fakulteta Univerziteta u Zenici 2019. godine. U tom radu je pokazano da posmatrana klasa grafova nije prazna. Ovdje dajemo, po uzoru na kvazi jako regularne grafove ([1]), neke potrebne uslove koje nenegativni cijeli brojevi $n, k, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p$ moraju zadovoljavati ukoliko su oni parametri nekog CDRG-grafa.

Ključne riječi: graf, dvostruko regularni graf, matrica susjedstva

Uvod

Prisjetimo se definicija dvostruko regularnih i CDRG-grafova koje smo uveli u [3] i [4].

Definicija 1.1: Za k -regularan graf G sa n vrhova kažemo da je CDRG-graf s parametrima $(n, k, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ako ima sljedeće dvije osobine:

- bilo koja dva nesusjedna vrha imaju tačno μ ($\mu \in \mathbb{N}_0$) zajedničkih susjeda i
- bilo koja dva susjedna vrha imaju λ_r zajedničkih susjeda za neki r ($1 \leq r \leq p$), pri čemu još vrijedi $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$.

Primijetimo da za parametre $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ vrijedi $0 \leq \mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \leq k$.

Ako je $p = 1$, graf G je jako regularan. Za graf G reći ćemo da je *strogi CDRG-graf* ako on nije jako regularan, tj. ako je $p > 1$. U nastavku ovog rada podrazumijevat ćemo da je G strogi CDRG-graf.

Definicija 1.2: Razred CDRG-grafa G je broj indeksa $1 \leq i \leq p$ za koje postoje dva susjedna vrha u G sa λ_i zajedničkih susjeda. CDRG-graf razreda 2 nazvat ćemo *dvostruko regularnim grafom* s parametrima $(n, k, \mu; \lambda_1, \lambda_2)$.

Neka je G graf sa skupom vrhova $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. U glavnim rezultatima koristit ćemo sljedeće oznake:

- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ – matrica susjedstva grafa G ,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je vrh } x_i \text{ susjedan sa vrhom } x_j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$
- I – jedinična matrica formata $n \times n$;
- J – matrica formata $n \times n$ čiji su svi elementi jedinice;
- $M_1, M_2, \dots, M_p$ – matrice formata $n \times n$ zadane na sljedeći način:

¹²³ Ovaj rad je realizacija zajedničkog naučnoistraživačkog projekta koji je odobren po Konkursu za sufinansiranje naučne i tehnološke saradnje između Bosne i Hercegovine (Univerzitet u Zenici) i Republike Slovenije (Univerzitet u Kopru) za period 2021. – 2023.

U matrici M_r na poziciji (i, j) stoji 1 ako su vrhovi x_i i x_j susjedni i ako oni imaju λ_r zajedničkih susjeda, a 0 u suprotnom, za sve $r = 1, 2, \dots, p$.

Ako je elemenat na presjeku i -tog reda i j -te kolone u matrici A jednak nuli, na tom istom mjestu je nula i u svim matricama $M_1, M_2, \dots, M_p$, a ako je na nekom mjestu u matrici A jedinica, onda postoji tačno jedna matrica među matricama $M_1, M_2, \dots, M_p$ koja na tom mjestu ima jedinicu, dok sve ostale matrice na tom mjestu imaju nulu i zato je očigledno da vrijedi jednakost:

$$A = M_1 + M_2 + \dots + M_p.$$

U matrici $B = J - I - A$ na poziciji (i, j) stoji 0 ako je vrh x_i susjedan sa vrhom x_j i 1 u suprotnom. Primijetimo da je B matrica susjedstva komplementarnog grafa $\bar{G}$. Ako graf G ima dijametar 2, tada takođe vrijedi $J - I - A = A_2$, gdje su elementi matrice A_2 definisani na sljedeći način: na poziciji (i, j) stoji 1 ako su vrhovi x_i i x_j na udaljenosti 2, a 0 inače.

Skup svih susjednih vrhova vrha x_i ($x_i \in V, i \in \{1, 2, \dots, n\}$) označavat ćemo oznakom $\Gamma_1(x_i)$. Za proizvoljni neprazni skup $S \subset W$, pri čemu je W vektorski prostor nad poljem K , oznaka $\text{span}(S)$ označava najmanji vektorski potprostor prostora W koji sadrži skup S .

Za dokaz Propozicije 2.1 i Propozicije 2.8 trebat ćemo sljedeće poznate rezultate:

Teorema 1.1 [5]: Broj šetnji dužine $l \geq 0$ između vrhova x_i i x_j je jednak elementu $a_{ij}^{(l)}$ matrice A^l .

Teorema 1.2 [2]: Povezan graf $G = (V, E)$ sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_d$ je regularan graf ako i samo ako postoji polinom $h \in \mathbb{R}_d[x]$ takav da je $h(A) = J$. Ovaj polinom je jedinstven i naziva se Hoffmanovim polinomom. Svojstvene vrijednosti $\lambda_i, i \neq 0$ su nule polinoma h i $h[\lambda_0] = n$ ($:= |V|$). Dakle, $h(x) = \frac{n}{\pi_0} \prod_{i=1}^d (x - \lambda_i)$, gdje je $\pi_0 := \prod_{i=1}^d (\lambda_0 - \lambda_i)$.

Glavni rezultati

Propozicija 2.1: Neka je G strogi CDRG-graf s parametrima $(n, k, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ i neka su definisani brojevi α_r^i za svaki vrh x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) na sljedeći način: $\alpha_r^i = |\{x_j \in G \mid |\Gamma_1(x_i) \cap \Gamma_1(x_j)| = \lambda_r\}|$, ($r = 1, 2, \dots, p$), tada vrijede jednakosti:

$$\sum_{r=1}^p \alpha_r^i = k \text{ i } \sum_{r=1}^p \alpha_r^i \lambda_r = k(k-1) - \mu(n-k-1), i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Dokaz: Jednakost $\sum_{r=1}^p \alpha_r^i = k$ važi očigledno s obzirom da je G k -regularan graf, pa svaki vrh x_i ima tačno k susjeda, a s druge strane broj susjeda vrha x_i je upravo $\sum_{r=1}^p \alpha_r^i$.

Prema Teoremi 1.1 za svaka dva vrha x_i i x_j grafa G broj šetnji dužine 2 između ta dva vrha jednak je broju koji se nalazi na poziciji (i, j) u matrice A^2 . Iz definicije množenja matrica imamo: $a_{ij}^{(2)} = \sum_{t=1}^n a_{it} a_{tj}$. Dakle, na mjestu (i, j) u matrice A^2 pisat će broj uspješnih prolazaka od vrha x_i do vrha x_j preko nekog trećeg vrha x_t . Prolazak će biti uspješan ako je x_t zajednički susjed vrhova x_i i x_j . Elementi matrice A^2 mogu biti i cijeli brojevi veći od 0 ili 1 i zavisno o tome da li su x_i i x_j susjedni ili nesusjedni vrhovi, elemenat $a_{ij}^{(2)}$ može biti jednak λ_1 ili λ_2 ili ... λ_p ili μ . Dakle, $a_{ij}^{(2)}$ ($i \neq j$) je jednak broju zajedničkih susjeda vrhova x_i i x_j , a za $x_i = x_j$ ($i = j$), $a_{ii}^{(2)}$ je jednak stepenu vrha x_i , tj. jednak je k budući da je G k -regularan graf.

Otuda vrijedi jednakost:

$$A^2 = kI + \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_p M_p + \mu(J - I - A).$$

Odnosno,

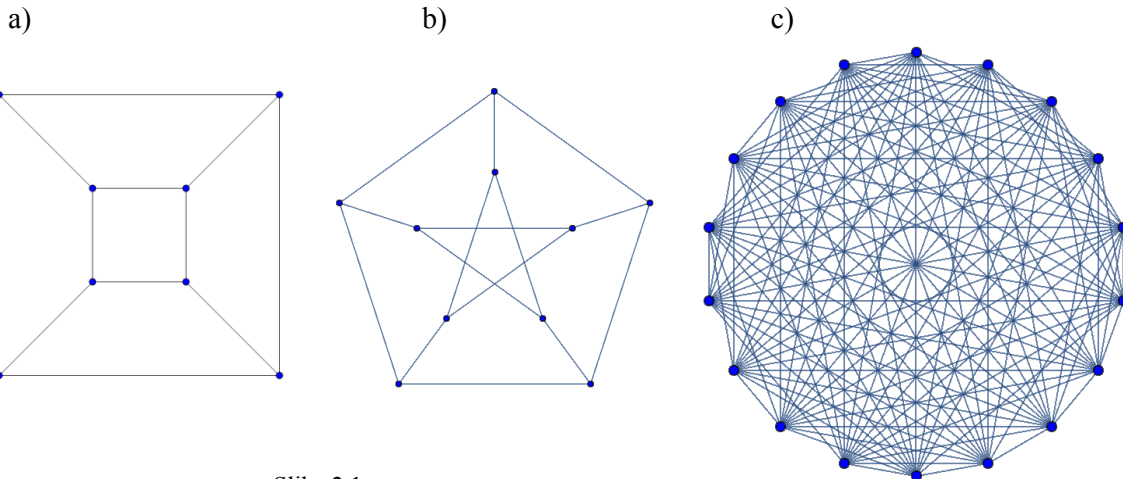
$$A^2 - (k - \mu)I + \mu A - \mu J = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_p M_p.$$

Zatim, uzmimo da je $\mathbf{j}$ vektor kolona čiji su svi elementi jedinice (ona je formata $n \times 1$). Tada je $A\mathbf{j} = k\mathbf{j}$ (zbog k -regularnosti grafa) i $J\mathbf{j} = n\mathbf{j}$. To dalje povlači da je

$$\begin{aligned} (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_p M_p)\mathbf{j} &= \lambda_1 M_1 \mathbf{j} + \lambda_2 M_2 \mathbf{j} + \dots + \lambda_p M_p \mathbf{j} = (A^2 - (k - \mu)I + \mu A - \mu J)\mathbf{j} \\ A^2 \mathbf{j} - (k - \mu)\mathbf{j} + \mu A \mathbf{j} - \mu J \mathbf{j} &= A(A\mathbf{j}) - (k - \mu)\mathbf{j} + \mu k \mathbf{j} - \mu n \mathbf{j} = kA\mathbf{j} + (\mu k - \mu n + \mu - k)\mathbf{j} = \\ (k^2 + \mu k - \mu n + \mu - k)\mathbf{j} &= (k(k - 1) - \mu(n - k - 1))\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Jednakosti koje smo željeli dokazati se dobiju izjednačavanjem odgovarajućih elemenata matrica $\lambda_1 M_1 \mathbf{j} + \lambda_2 M_2 \mathbf{j} + \dots + \lambda_p M_p \mathbf{j}$ i $(k(k - 1) - \mu(n - k - 1))\mathbf{j}$. ■

Primjer 2.3: Neka G_1 označava kubni graf (graf određen vrhovima i bridovima kocke). G_1 je udaljeno-regularan graf s presječnim nizom $\{3, 2, 1; 1, 2, 3\}$. Neka G_2 označava Petersenov graf. Petersenov graf je jako regularan graf sa parametrima $(10, 3, 0, 1)$. Takođe, on je i udaljeno-regularan graf sa presječnim nizom $\{3, 2; 1, 1\}$. Posmatrajmo komplementarni graf disjunktne unije ova dva grafa. Ako disjunktну uniju ova dva grafa označimo sa G onda prema Propoziciji 2 u [3] $\tilde{G}$ je CDRG-graf s parametrima $(18, 14, 12; 12, 11, 10)$. Brojevi α_r^i , ($r = 1, 2, 3$) prema Propoziciji 2.1 zavise od izbora vrha x_i ($i \in \{1, 2, \dots, 18\}$). U ovom slučaju se skup svih vrhova grafa $\tilde{G}$ može napisati kao disjunktна unija skupova V_1 i V_2 . I za svaki vrh iz V_1 imamo: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 0$ i $\alpha_3 = 11$, a za svaki vrh iz V_2 je $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 6$ i $\alpha_3 = 8$. Skup V_1 se poklapa sa vrhovima kubnog grafa, a V_2 sa vrhovima Petersenovog grafa. Na sljedećim slikama su dati grafički prikazi kubnog grafa, Petersenovog grafa i komplementarnog grafa njihove disjunktne unije.



Slika 2.1

Posljedica 2.4: Ako je G strogi CDRG-graf s parametrima $(n, k, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$, tada vrijede nejednakosti:

- i) $(\lambda_p - \mu)k + (n - 1)\mu < k(k - 1) < (\lambda_1 - \mu)k + (n - 1)\mu$
- ii) $\mu < k$.

Dokaz: Imamo da je $p \geq 2$. Oduzimanjem lijevih i desnih strana jednakosti:

$$\begin{aligned} A^2 - kI - \mu(J - I - A) &= \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_p M_p \text{ i} \\ \lambda_p A &= \lambda_p (M_1 + M_2 + \dots + M_p) \end{aligned}$$

te množenjem s desna matricom $\mathbf{j}$ dobijamo:

$$\left(\sum_{r=1}^{p-1} (\lambda_r - \lambda_p) M_r \right) \mathbf{j} = (A^2 - kI - \mu(J - I - A) - \lambda_p A) \mathbf{j}.$$

Kao ranije iz $A\mathbf{j} = k\mathbf{j}$ i $J\mathbf{j} = n\mathbf{j}$ slijedi da je

$$(A^2 - kI - \mu(J - I - A) - \lambda_p A) \mathbf{j} = (k(k-1) - \mu(n-k-1)) \mathbf{j},$$

a otuda

$$\left(\sum_{r=1}^{p-1} (\lambda_r - \lambda_p) M_r \right) \mathbf{j} = (k(k-1) - (n-1)\mu - (\lambda_p - \mu)k) \mathbf{j}. \quad (2.1)$$

Analogno se dokaže da je

$$\left(\sum_{r=2}^p (\lambda_1 - \lambda_r) M_r \right) \mathbf{j} = ((n-1)\mu + (\lambda_1 - \mu)k - k(k-1)) \mathbf{j}. \quad (2.2)$$

Po definiciji *CDRG*-graфа je $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$ pa su elementi matrica na lijevoj strani jednakosti (2.1) i (2.2) pozitivni, otuda su pozitivni i elementi odgovarajućih matrica na desnoj strani jednakosti, tj.

$$\begin{aligned} k(k-1) - (n-1)\mu - (\lambda_p - \mu)k &> 0 \quad \text{i} \\ (n-1)\mu + (\lambda_1 - \mu)k - k(k-1) &> 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Odavde sada slijedi nejednakost koju smo htjeli dokazati:

$$(\lambda_p - \mu)k + (n-1)\mu < k(k-1) < (\lambda_1 - \mu)k + (n-1)\mu.$$

- ii) Budući da je graf G k -regularan, to je $\mu \leq k$. Treba dokazati da ne vrijedi jednakost $\mu = k$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\mu = k$. Iz nejednakost (2.3) dijeljenjem sa

$k = \mu$ dobijamo:

$$\lambda_p - k + n < k \Rightarrow \lambda_p + n < 2k. \quad (2.4)$$

Ako su x_i i x_j vrhovi graфа G takvi da je $|\Gamma_1(x_i) \cap \Gamma_1(x_j)| = \lambda_p$, tada je

$$n \geq |\Gamma_1(x) \cup \Gamma_1(y)| = |\Gamma_1(x)| + |\Gamma_1(y)| - |\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)| = k + k - \lambda_p = 2k - \lambda_p,$$

što znači da je $\lambda_p + n \geq 2k$ i to je u suprotnosti sa (2.4). Do kontradikcije nas je dovela pretpostavka da je $\mu = k$. ■

Posljedica 2.5: Neka je G jaki dvostruko regularni graf s parametrima $(n, k, \mu; \lambda_1, \lambda_2)$, i neka su definisani brojevi α_r^i za svaki vrh x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) na sljedeći način: $\alpha_r^i = |\{x_j \in G \mid |\Gamma_1(x_i) \cap \Gamma_1(x_j)| = \lambda_r\}|$, ($r = 1, 2$), tada α_r^i ($r = 1, 2$) ne zavise od izbora vrha x_i i ako α_1^i i α_2^i označimo sa α i β respektivno vrijedi:

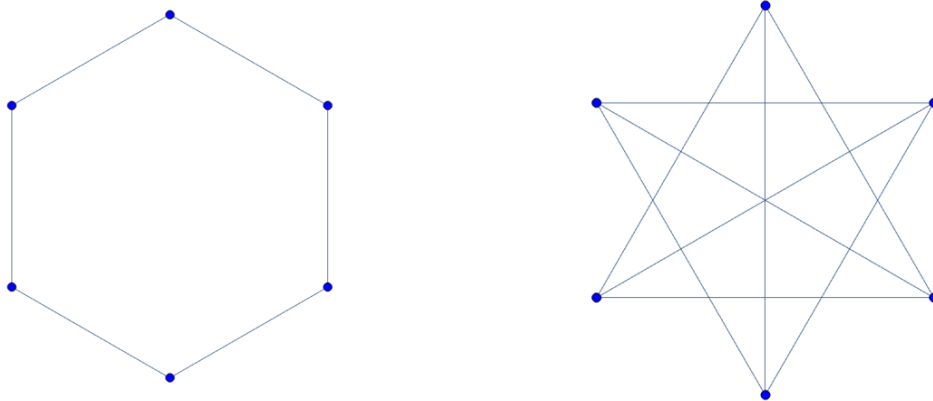
$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k(k-1) - \mu(n-1) + (\mu - \lambda_2)k}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \beta &= \frac{(\lambda_1 - \mu)k + \mu(n-1) - k(k-1)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned}$$

Dokaz: Neposredno iz Propozicije 2.1.

Primjer 2.6: Na slici 2.2. se nalaze grafički prikazi cikličkog graфа reda 6 i njegovog komplementarnog graфа. Njegov komplementarni graf je prema Propoziciji 1 u ([4]) dvostruko regularni graf s parametrima $(6, 3, 2; 1, 0)$. Prema formuli datoj u Posljedici 2.5 za ovaj graf je $\alpha = 2$ i $\beta = 1$.

a)

b)



Slika 2.2.

Primjer 2.7: Jasno je da α i β moraju biti pozitivni cijeli brojevi između 1 i k . Dobili smo uslov izvodljivosti na potencijalnom skupu parametara $(n, k, \mu; \lambda_1, \lambda_2)$. Ne postoji strogi dvostruko regularni graf s parametrima $(35, 20, 17; 6, 3)$, jer bi tada imali prema Posljedici 2.5 da je $\alpha = \frac{82}{3}$, što je apsurd.

Propozicija 2.8: Ako je G strogi CDRG-graf s parametrima $(n, k, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tada vrijede tvrdnje:

- i) Ako graf G ima tačno $d + 1$ svojstvenih vrijednosti $\{k, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d\}$, tada matrica $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_p M_p \in \text{span}\{I, A, A^2, \dots, A^d\}$.
- ii) Ako je d namanji prirodni broj takav da $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_p M_p \in \text{span}\{I, A, A^2, \dots, A^d\}$, tada graf G ima tačno $d + 1$ različitih svojstvenih vrijednosti.

Dokaz: i) Graf G je povezan k -regularni graf sa n vrhova i $d + 1$ različitih svojstvenih vrijednosti $\{k, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d\}$ pa prema Teoremi 1.2 postoji polinom sa koeficijentima iz skupa realnih brojeva stepena d takav da je $h(A) = J$. Iz te teoreme takođe dobijamo jednakost:

$$(A - \theta_1 I)(A - \theta_2 I) \dots (A - \theta_d I) = \frac{1}{n}(k - \theta_1)(k - \theta_2) \dots (k - \theta_d)J.$$

Ranije smo dokazali da je

$$A^2 = (k - \mu)I + \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_p M_p - \mu A + \mu J.$$

Sada iz ove dvije jednakosti slijedi tvrdnja teoreme.

- iii) Dokazuje se analogno.

Zaključak

Proučavajući definicije regularnih, jako regularnih i kvazi-jako regularnih grafova prirodno se nameće i definicija CDRG-grafova što je opisano u radovima [3] i [4]. U istim radovima smo pokazali da ta nova klasa ima beskonačno mnogo članova te smo posebno istakli jednu njenu potklasu koju smo nazvali dvostruko regularnim grafovima. Na osnovu ovog rada vidimo da je CDRG-grafove moguće sistematski proučavati baš kao i regularne, jako regularne i kvazi-jako regularne grafove. Posljedica 2.5 u ovom radu daje potrebne uslove koje skup parametara $(n, k, \mu; \lambda_1, \lambda_2)$ mora zadovoljavati ukoliko se radi o strogom dvostruko regularnom grafu i ona je analogna Teoremi 2.1 u [1] za kvazi-jako regularne grafove.

Reference:

- [1] F. Goldberg, On quasi-strongly regular graphs. *Linear and Multilinear Algebra* **54** (2006), no. 6, 437 – 451.
- [2] A. J. Hoffman, On the polynomial of a graph. *Amer. Math. Monthly* **70** (1963), no. 1, 30-36.
- [3] S. Penjić, A. Huskanović, H. Alajbegović, Konstrukcije dvostruko regularnih grafova drugi dio. *Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Zenici* (2020), no. 18, 230-235, ISSN2637-2088
- [4] S. Penjić, Dž. Zečić, H. Alajbegović, Konstrukcije dvostruko regularnih grafova. *Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Zenici* (2019), no. 17, 268 – 276, ISSN2637-2088
- [5] D. Stevanović, M. Ćirić, S. Simić, V. Baltić, *Diskretna matematika: osnove kombinatorike i teorije grafova*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2008.

SOME PROPERTIES OF PARAMETERS OF CDRG-GRAPHS**Summary**

We introduced CDRG-graphs as a new class of graphs in the paper "Constructions of double-regular graphs", which was published in the Proceedings of the Faculty of Philosophy in 2019. In that paper, it is shown that the observed class of graphs is not empty. Here we give, following the example of quasi strongly regular graphs ([1]), some necessary conditions which nonnegative integers $n, k, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p$ must satisfy if they are parameters of a CDRG graph.

Key words: graph, doubly regular graph, adjacency matrix