

Dr. sc. Hermina Alajbegović, Univerzitet u Zenici
Dr. sc. Almir Huskanović, Univerzitet u Zenici

ASIMPTOTSKA PROCJENA JEDNOG GENERALIZIRANOG PROBLEMA DJELIOCA

Sažetak

U ovom radu ćemo dati procjene sume $\sum_{nmh \leq x} nm$ pomoću elementarnih metoda. Navedena suma je poopćavanje problema djelioca i koristi se u procjeni broja podgrupa konačnog indeksa u kristalografskim grupama ([1], [2]).

UVOD

Problem Dirichletovog djelioca je određivanje asimptotskog ponašanja sume

$$D(x) = \sum_{n \leq x} d(n)$$

gdje $d(n)$ označava broj različitih djelioca od prirodnog broja n , kada $x \rightarrow \infty$. Korištenjem elementarne metode Dirichlet je pokazao da vrijedi:

$$D(x) = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$$

gdje je γ Eulerova konstanta. Također je razmatrao općenitiji oblik:

$$D_k(x) = \sum_{n \leq x} d_k(n),$$

pri čemu $d_k(n)$ označava broj načina prikaza pozitivnog broja n kao proizvoda k faktora, te je, također, elementarnom metodom dobio sljedeću asimptotsku formulu:

$$D_k(x) = \sum_{n \leq x} d_k(n) = x p_k(\ln x) + \Delta_k, \quad \Delta_k = O(x^{1-\frac{1}{k}} \ln^{k-2} x), \quad k = 2, 3, \dots$$

gdje je p_k polinom stepena $k - 1$. Cilj je pronaći najmanju vrijednost za α_k tako da vrijedi:

$$\Delta_k = O(x^{\alpha_k + \varepsilon})$$

za svaki pozitivan realan broj ε .

Najopćenitija postavka problema je pronaći asimptotičku formulu za funkciju

$$D(n; \beta; \alpha; x) = \sum_{m_1^{b_1} m_2^{b_2} \dots m_n^{b_n} \leq x} m_1^{a_1} m_2^{a_2} \dots m_n^{a_n},$$

kada x teži ka beskonačnosti, gdje je n prirodan broj, $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ je n -torka prirodnih brojeva, $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ su n -torka realnih brojeva koje još uvijek vrijedi $0 < b_1 \leq \dots \leq b_n$ i x je realan broj veći od 1.

C. Calderon, M. J. Zarate ([5]) i G. Bhowmik, J. Wu ([4]) su proučavali ovaj najopćenitiji problem djelioca. U ovom radu, promatrat ćemo poseban slučaj općeg modela: $\sum_{nmh \leq x} nm$. Korištenjem elementarne metode i Huxleyovog rezultata ([6]) dobili smo bolji rezultat za član kojim je iskazana greška u asimptotskoj formuli u odnosu na rezultate koji se mogu izvesti iz teorema u radovima [4] i [5]. Naš glavni rezultat je sljedeća teorema:

Teorema 1.1.

$$\sum_{nmh \leq x} nm = \frac{1}{24} \pi^2 x^2 (-1 + 6\gamma - 24 \ln A + 2 \ln(2\pi) + 2 \ln x) + O(x^{\frac{547}{416} + \varepsilon})$$

za svaki pozitivan realan broj ε .

ASIMPTOTSKA PROCJENA ZA $\sum_{nmh \leq x} mn$

Da bismo dokazali našu teoremu, koristit ćemo Abelov identitet ([3], 4.2), identitet parcijalnih suma Dirichletovog produkta ([3], Th. 3.10), Eulerovu formulu sabiranja ([3], Th 3.1), kao i nekoliko asimptotskih formula koje proizlaze iz Eulerove formule sabiranja:

(i) $\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{qd \leq x} 1 = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$, gdje je γ Eulerova konstanta.

(ii) $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$, γ označava Eulerovu konstantu.

(iii) $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s})$, ako je $s > 0, s \neq 1$ i $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ Riemannova zeta funkcija.

(iv) $-\sum_{n \leq x} \frac{\ln n}{n^2} = \zeta'(2) + O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$.

Dokaz od (iv):

$$-\sum_{n \leq x} \frac{\ln n}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} + \sum_{n > x} \frac{\ln n}{n^2} = \zeta'(2) + \sum_{n > x} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Posmatrajmo sumu $\sum_{n > x}^y \frac{\ln n}{n^2}$. Koristit ćemo Eulerovu formulu sabiranja ([3], Teorema 3.1, strana 54.) i činjenicu da je $\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' < 0$ na posmatranom intervalu:

$$\sum_{n > x}^y \frac{\ln n}{n^2} = \int_x^y \frac{\ln t}{t^2} dt + \int_x^y (t - [t]) \left(\frac{\ln t}{t^2}\right)' dt + \frac{\ln y}{y^2} ([y] - y) - \frac{\ln x}{x^2} ([x] - x)$$

$$\leq \int_x^y \frac{\ln t}{t^2} dt + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1 + \ln x}{x} - \frac{1 + \ln y}{y} + \frac{\ln x}{x^2}.$$

Pustimo da $y \rightarrow \infty$, dobivamo da je

$$\sum_{n>x} \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

Vrijednost $\zeta'(2) = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ je izračunao Glaisher 1894. godine. On je pokazao da vrijedi:

$$-\zeta'(2) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} = \frac{1}{6} \pi^2 (12 \ln A - \gamma - \ln(2\pi)),$$

gdje je γ Eulerova konstanta ($\gamma \approx 0.5772156 \dots$) i A je Glaisher-Kinkelinova konstanta ($A \approx 1.2824271 \dots$). ■

Dokaz Teoreme 1.1.:

$$\begin{aligned} \sum_{nmh \leq x} nm &= \sum_{n \leq x} \sum_{q|n} qd(q) = \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq \frac{x}{d}} qd(q) \\ &= \sum_{d \leq x} \left\{ \frac{x}{d} \left(\sum_{q \leq \frac{x}{d}} d(q) \right) - 1 \cdot 1 - \int_1^{\frac{x}{d}} \sum_{q \leq t} d(q) dt \right\} \\ &= \sum_{d \leq x} \left\{ \frac{x}{d} \left(\frac{x}{d} \ln \frac{x}{d} + (2\gamma - 1) \frac{x}{d} + o\left(\sqrt{\frac{x}{d}}\right) \right) - 1 \cdot 1 - \int_1^{\frac{x}{d}} (t \ln t + (2\gamma - 1)t + o(\sqrt{t})) dt \right\} \\ &= x^2 \ln x \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^2} - x^2 \sum_{d \leq x} \frac{\ln d}{d^2} + (2\gamma - 1)x^2 \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^2} + o\left(x\sqrt{x} \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^{3/2}}\right) - \sum_{d \leq x} 1 \\ &\quad - \sum_{d \leq x} \int_1^{\frac{x}{d}} (t \ln t + (2\gamma - 1)t + o(\sqrt{t})) dt \\ &= (x^2 \ln x + (2\gamma - 1)x^2) \left\{ -\frac{1}{x} + \zeta(2) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right\} + x^2 \left(\zeta'(2) + o\left(\frac{\ln x}{x}\right) \right) + o\left(x\sqrt{x} \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^{3/2}}\right) \\ &\quad - [x] - \sum_{d \leq x} \left(\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{4} + (2\gamma - 1) \frac{t^2}{2} + o(t\sqrt{t}) \right) \Big|_1^{\frac{x}{d}} \\ &= \zeta(2)x^2 \ln x + x^2 \left(\frac{\pi^2}{6} (\gamma + \ln 2\pi - 12 \ln A) \right) + x^2 (2\gamma - 1) \zeta(2) + o(x\sqrt{x}) - [x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{d \leq x} \left(\frac{x^2}{2d^2} \ln \frac{x}{d} - \frac{x^2}{4d^2} + (2\gamma - 1) \frac{x^2}{2d^2} + O\left(\frac{x\sqrt{x}}{d\sqrt{d}}\right) + \frac{1}{4} - \frac{(2\gamma - 1)}{2} - O(1) \right) \\
& = \frac{1}{24} \pi^2 x^2 (-1 + 6\gamma - 24\ln A + 2\ln(2\pi) + 2\ln x) - O\left(x\sqrt{x} \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^{\frac{3}{2}}}\right) + O(x\sqrt{x}) \\
& = \frac{1}{24} \pi^2 x^2 (-1 + 6\gamma - 24\ln A + 2\ln(2\pi) + 2\ln x) - O\left(x\sqrt{x} \left\{ \frac{x^{1-\frac{3}{2}}}{1-\frac{3}{2}} + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}\right) \\
& \quad + O(x\sqrt{x}) \\
& = \frac{1}{24} \pi^2 x^2 (-1 + 6\gamma - 24\ln A + 2\ln(2\pi) + 2\ln x) + O(x\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

1916. god., Hardy je pokazao da je $\inf \alpha \geq \frac{1}{4}$, pri čemu α predstavlja realne brojeve za koji vrijedi asimptotska formula

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\alpha+\varepsilon})$$

za svaki pozitivan realan broj ε .

Pod pretpostavkom da je asimptotska formula

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt[4]{x})$$

tačna, dobivamo

$$\sum_{nmh \leq x} nm = \frac{1}{24} \pi^2 x^2 (-1 + 6\gamma - 24\ln A + 2\ln(2\pi) + 2\ln x) + O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}),$$

a ako uzmemo Huxleyov rezultat:

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\frac{131}{416}+\varepsilon}\right),$$

dobit ćemo:

$$\sum_{nmh \leq x} nm = \frac{1}{24} \pi^2 x^2 (-1 + 6\gamma - 24\ln A + 2\ln(2\pi) + 2\ln x) + O(x^{\frac{547}{416}+\varepsilon}). \blacksquare$$

ZAKLJUČAK

Asimptotske formule $\sum_{nm \leq x} n$, $\sum_{nmh \leq x} n$, $\sum_{nmh \leq x} nm^2$ i $\sum_{nmh \leq x} nm$ mogu se iskoristiti za procjenu broja podgrupa konačnog indeksa n u kristalografskim grupama. Zeta funkcija grupe G se definiše kao $\zeta_G(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(G) n^{-s}$, gdje a_n označava broj podgrupa indeksa n u G . Zeta funkcija prvih 10 kristalografskih grupa može se naći u [1] i [2]. Koristeći ove jednačine možemo izračunati tačan broj podgrupa danog indeksa u kristalografskoj grupi i asimptotske procjene sume $\sum_{n \leq x} a_n(G)$. Tako npr. za kristalografsku grupu Cc imamo:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_n = & \sum_{n_1 n_2 n_3 \leq x} n_2 n_3 - 3 \cdot \sum_{2 n_1 n_2 n_3 \leq x} n_2 n_3 + 10 \cdot \sum_{4 n_1 n_2 n_3 \leq x} n_2 n_3 + \\ & + (-8) \cdot \sum_{8 n_1 n_2 n_3 \leq x} n_2 n_3 + \sum_{2 n_1 n_2 n_3 \leq x} n_2 n_3^2 = \frac{\pi^2 x^3 \zeta(3)}{144} + O(x^2 \ln x) \end{aligned}$$

za sve dovoljno velike x . Ako posmatramo samo podgrupe konačnog indeksa koje nisu sadržane u translacijskoj podgrupi T , onda trebamo samo asimptotsku formulu za $\sum_{nmh \leq x} nm$.

Literatura:

- [1] H. Alajbegović, M. Avdispahić, Zeta and normal zeta functions for a subclass of space groups, *J. Math. Chem.*, 53 (2015), No. 7, 1537-1548
- [2] H. Alajbegović, M. Avdispahić, Zeta functions and subgroup growth in $P2/m$, *J. Math. Chem.*, 54 (2016), No. 1, 331-343
- [3] T. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin 1976.
- [4] G. Bhowmik, J. Wu, On the asymptotic behaviour of the number of subgroups of finite abelian groups, *Arch. Math. (Basel)*, 69 (1997), No. 2, 95-104.
- [5] C. Calderon, M. J. Zarate, Generalized divisor problem, *Bull. Belg. Math. Soc.*, 2 (1995), 59-63.
- [6] M. N. Huxley, Exponential Sums and Lattice Points III, *Proc. London Math. Soc.*, 87 (2003), No. 3, 591-609.
- [7] E. C. Titchmarsh, *The Theory Of The Riemann Zeta-Function*, Oxford University Press, Oxford 1986.

ASYMPTOTIC ESTIMATION OF A GENERALIZED DIVISOR PROBLEM

Summary

The sum $\sum_{nmh \leq x} nm$ will be estimated in this paper by using elementary methods. The sum $\sum_{nmh \leq x} nm$ is a generalization of the divisor problem and it is applied when estimating the number of subgroups of the finite index in crystallographic groups ([1], [2]).