

Naida Bikić
Rabija Musić
Vehid Kurtić

UTICAJ PRIMJENE GEOGEBRE NA POSTIGNUĆA UČENIKA U OBRADI PITAGORINE TEOREME

Sažetak

Cilj ovog rada je ispitati uticaj primjene GeoGebre na postignuća učenika u obradi Pitagorine teoreme. U istraživanju je učestvovalo 47 učenika osmih razreda osnovne škole, podijeljenih u eksperimentalnu (N=31) i kontrolnu (N=16) grupu. Eksperimentalna grupa učila je uz primjenu GeoGebre i e-udžbenika, dok je kontrolna grupa radila prema tradicionalnom pristupu. Rezultati su pokazali značajno bolje postignuće učenika eksperimentalne grupe, što potvrđuje efikasnost GeoGebre kao alata za učenje i razumijevanje geometrijskih odnosa. GeoGebra omogućava vizualizaciju, interaktivno istraživanje i razvoj prostornog mišljenja kod učenika. Rezultati istraživanja ukazuju na potrebu većeg uključivanja digitalnih alata u nastavu matematike.

Ključne riječi: *GeoGebra, Pitagorina teorema, geometrija, nastava matematike, postignuća učenika.*

THE IMPACT OF USING GEOGEBRA ON STUDENTS' ACHIEVEMENT IN LEARNING THE PYTHAGOREAN THEOREM

Abstract

The aim of this paper is to examine the impact of using GeoGebra on students' achievement in learning the Pythagorean theorem. The study involved 47 eighth-grade elementary school students, divided into an experimental group (N=31) and a control group (N=16). The experimental group was taught using GeoGebra and an e-textbook, while the control group followed a traditional teaching approach. The results showed significantly better achievement among the students in the experimental group, confirming the effectiveness of GeoGebra as a tool for learning and understanding geometric relationships. GeoGebra enables visualization, interactive exploration, and the development of students' spatial reasoning. The findings indicate the need for greater integration of digital tools in mathematics teaching.

Keywords: GeoGebra, Pythagorean theorem, geometry, mathematics teaching, student achievement.

1. Uvod

Savremena nastava matematike usmjerena je na aktivnu ulogu učenika u procesu učenja, istraživanja i otkrivanja matematičkih odnosa. Digitalne tehnologije, a posebno alati dinamične geometrije poput GeoGebre, omogućavaju interaktivno učenje, vizualizaciju i eksperimentisanje s matematičkim pojmovima. Pitagorina teorema, kao jedno od temeljnih znanja geometrije, često predstavlja izazov za učenike osnovne škole. Cilj ovog rada je ispitati kako primjena GeoGebre u nastavi geometrije utiče na postignuća učenika u obradi i razumijevanju Pitagorine teoreme.

Savremena nastava matematike sve se više udaljava od tradicionalnog modela u kojem je nastavnik centralna figura, a učenik pasivni primalac informacija. Umjesto toga, savremeni pristup podučavanju orijentisan je na učenika, njegovu aktivnost, istraživanje i samostalno konstruisanje znanja. Teorija konstruktivizma naglašava da učenik mora biti aktivno uključen u nastavni proces te vlastitim iskustvom i misaonim naporom dolaziti do novih spoznaja. Na taj način učenik „konstruira“ svoje znanje, oslanjajući se na prethodno iskustvo i vlastite misaone procese (Bjelanović Dijanić, 2010). Savremena nastava teži razvoju stvaralačkog i divergentnog mišljenja, učenju otkrivanjem i samostalnom rješavanju problema (De Zan, 2005). Kurnik (2008) ističe da su osnovni ciljevi savremene metodike nastave matematike: samostalan i stvaralački rad učenika, uvođenje učenika u istraživačku nastavu, razvijanje sposobnosti za rješavanje problema te primjena savremenih nastavnih metoda. U procesu podučavanja matematike važno je razvijati sposobnost simboličkog i apstraktnog predstavljanja, ali i vizuelnog razmišljanja, pri čemu tehnologija ima ključnu ulogu. Posebno u geometriji, digitalni alati omogućavaju dinamično vizuelno predstavljanje pojmova i relacija među objektima, čime se proces razumijevanja znatno olakšava i ubrzava. Tall (2000) naglašava da senzomotorički i vizuelni aspekti mogu dopuniti numeričko i algebarsko mišljenje, a dostupnost tehnologije mijenja prirodu matematičkog mišljenja, omogućavajući razvoj intuitivnog razumijevanja pojmova i prije usvajanja formalnih teorija. Istraživanja su pokazala da učenici koji uče matematiku kroz igre, interaktivne priče i digitalne alate postižu bolje rezultate od onih koji rade u tradicionalnim okruženjima. Posebno u nastavi geometrije, upotreba softvera koji omogućava dodavanje, pomjeranje i transformisanje geometrijskih objekata doprinosi razvoju prostornog mišljenja, razumijevanju odnosa među veličinama, te podstiče komunikaciju i saradnju među učenicima. Takvi pristupi povećavaju kritičke sposobnosti, samopouzdanje i motivaciju za učenje (Oakley and Lim, 2013). Nastavna tehnologija danas je neizostavan dio savremenog nastavnog procesa. Njena primjena olakšava učenje, potiče motivaciju učenika i doprinosi razvoju različitih vještina i kompetencija. Učenici su sve ranije izloženi digitalnim tehnologijama, pa se njihova integracija u nastavu nameće kao prirodan i potreban korak. U skladu s tim, u ovom radu ispituju se efekti primjene GeoGebre — dinamičkog matematičkog softvera koji omogućava interaktivno istraživanje i vizuelno razumijevanje geometrijskih pojmova. Fokus istraživanja je na postignućima učenika nakon primjene GeoGebre u nastavi, s ciljem da se ispita u kojoj mjeri ovaj digitalni alat doprinosi boljem razumijevanju i trajnijem usvajanju geometrijskih sadržaja.

2. Teorijski okvir

Savremena nastava matematike sve više se oslanja na informaciono-komunikacione tehnologije koje omogućavaju vizualizaciju, interaktivno učenje i dinamičko istraživanje matematičkih odnosa. Jedan od najpoznatijih alata dinamične geometrije – GeoGebra – predstavlja značajan pomak u didaktici matematike, jer integriše geometriju, algebru, analizu i statistiku u jedinstveno interaktivno okruženje. Brojna istraživanja potvrđuju da primjena GeoGebre ima pozitivan uticaj na razumijevanje, motivaciju i postignuća učenika na različitim obrazovnim nivoima.

Arbain i Shukor (2015) pokazali su da korištenje GeoGebre u nastavi statistike povećava motivaciju, samopouzdanje i angažovanost učenika, a istovremeno poboljšava njihove rezultate u odnosu na tradicionalni pristup. GeoGebra, kao besplatan i lako dostupan alat, omogućava nastavnicima da obogate nastavu vizuelnim i interaktivnim aktivnostima, podstičući razvoj kritičkog i kreativnog mišljenja. Slično tome, Bulut et al. (2016) utvrdili su da upotreba GeoGebre u poučavanju razlomaka kod učenika trećeg razreda osnovne škole dovodi do značajnog poboljšanja postignuća. Eksperimentalna grupa, koja je koristila višestruke dinamičke reprezentacije – površinski, skupovni i brojni model – postigla je znatno bolje rezultate od kontrolne grupe. Autori naglašavaju da kombinovanje više vizuelnih modela kroz GeoGebbru omogućava dublje i smislenije razumijevanje apstraktnih matematičkih koncepata, što je u skladu s konstruktivističkim pristupom učenju (NCTM, 2000).

Primjena GeoGebre u nastavi omogućava integraciju digitalnih alata u proces učenja i poučavanja, čime se potiče istraživačko učenje i vizualno razumijevanje geometrijskih pojmova. Piljug-Zahirović, Bikić, Kurtić i Burgić (2020) ističu da GeoGebra, kroz koncept virtuelne učionice i dinamičke aktivnosti, doprinosi razvoju samostalnosti, kreativnosti i motivacije studenata u savladavanju izometrijskih preslikavanja u ravni. Na sličan način, Bikić, Kamber i Nesimović (2015) navode da i učenici i nastavnici pozitivno percipiraju upotrebu GeoGebre u obradi funkcija, jer ovaj alat povećava motivaciju, razumijevanje i angažovanost tokom nastave.

Zulnaidi i Syed Zamri (2017) ističu da GeoGebra ima ključnu ulogu u razvoju proceduralnog i konceptualnog znanja. Njihovo istraživanje pokazalo je da proceduralno znanje posreduje između konceptualnog razumijevanja i uspjeha učenika, što znači da manipulacija matematičkim objektima u GeoGebri vodi ka dubljem razumijevanju i sposobnosti primjene znanja u novim situacijama. Autori zaključuju da učenici aktivno konstruiraju svoje znanje kroz interakciju s dinamičkim okruženjem, čime se potvrđuje konstruktivistička priroda učenja putem GeoGebre.

Asare i Atteh (2022), u svojoj studiji o transformacijama (rigid motion) u Gani, dokazali su da GeoGebra značajno povećava razumijevanje, motivaciju i samopouzdanje učenika u nastavi geometrije. Učenici koji su koristili GeoGebbru postigli su bolje rezultate i pokazali veći stepen angažovanosti u odnosu na one iz tradicionalne grupe. Autori naglašavaju da ovakav pristup podstiče saradničko učenje, razvoj digitalnih vještina i trajno razumijevanje geometrijskih principa. Slično tome, Zakaria i saradnici (2024) potvrđuju da integracija geometrijskog dizajna kroz GeoGebbru vodi ka značajnom porastu motivacije i akademskih postignuća kod učenika srednjih škola. Interaktivne i vizualne karakteristike GeoGebre omogućavaju učenicima da istražuju odnose među geometrijskim objektima, razvijaju sposobnosti rješavanja problema i grade dublje razumijevanje.

Na visokoškolskom nivou, Bedada i Machaba (2022) pokazali su da korištenje GeoGebre u učenju diferencijalnog računa dovodi do statistički značajnog napretka u znanju studenata.

GeoGebra je doprinijela razvoju proceduralnog razumijevanja, ali i transformaciji tog znanja u konceptualno kroz vizualizaciju i eksperimentisanje. Studija ukazuje da GeoGebra omogućava studentima različitih sposobnosti i polova da uspješnije povežu apstraktne ideje s realnim primjenama matematike, što potvrđuje njenu univerzalnu primjenjivost u matematičkom obrazovanju.

Sistematski pregled Muslim, Zakarie i Fanga (2023), koji obuhvata 15 studija iz perioda 2018–2023, pokazuje da većina istraživanja bilježi pozitivne stavove učenika i nastavnika prema primjeni GeoGebre, te da softver ima značajan uticaj na motivaciju, razumijevanje i postignuća. Autori naglašavaju da GeoGebra doprinosi profesionalnom razvoju nastavnika kao didaktičko sredstvo koje olakšava objašnjenje apstraktnih koncepata, ali upozoravaju i na izazove u njenoj implementaciji – posebno nedostatak vremena i tehničkih kompetencija nastavnika. Istraživanje sprovedeno u Ugandi (Research Discover Education, 2024) takođe potvrđuje da upotreba GeoGebre ima pozitivne efekte na razumijevanje geometrijskih koncepata i razvoj TPACK kompetencija kod budućih nastavnika matematike. Eksperimentalne grupe u tom istraživanju postigle su statistički značajno bolje rezultate od kontrolnih, dok su učesnici naveli povećano samopouzdanje i spremnost za primjenu tehnologije u nastavi.

Sveukupno, dosadašnja istraživanja potvrđuju da GeoGebra predstavlja moćan alat za unapređenje nastave matematike jer omogućava povezivanje apstraktnog i konkretnog, proceduralnog i konceptualnog, individualnog i saradničkog učenja. Dinamične vizualizacije koje nudi GeoGebra olakšavaju razumijevanje matematičkih odnosa, podstiču istraživački pristup učenju i doprinose većem angažmanu, samopouzdanju i trajnosti znanja kod učenika.

3. Metodologija istraživanja

Cilj ove studije je ispitati uticaj korištenja obrazovnog softvera GeoGebra na postignuća učenika u obradi Pitagorine teoreme. Glavna hipoteza rada je da će učenici koji koriste GeoGebrou postići bolje rezultate u odnosu na učenike koji pohađaju klasičnu nastavu.

3.1 Metode istraživanja

U svrhu potvrđivanja ili opovrgavanja postavljene hipoteze korištene su sljedeće metode:

- **Metoda analize**
Analiza postignuća učenika provedena je primjenom PRE-TESTA (test prije eksperimenta) i POST-TESTA (test nakon eksperimenta). PRE-TEST je korišten za utvrđivanje da su učenici eksperimentalne i kontrolne grupe na istom nivou predznanja. Također, analizirane su i završne ocjene iz matematike na kraju 7. razreda, kako bi se dodatno potvrdila ravnopravnost grupa prije eksperimentalnog programa.
- **Eksperimentalna metoda**
Eksperimentalna metoda korištena je za razvoj i primjenu e-udžbenika s originalno kreiranim istraživačkim zadacima i apletima, koji su služili za poučavanje učenika u eksperimentalnoj grupi. E-udžbenik je javno dostupan i korišten tokom trajanja eksperimenta.
- **Statističke metode**
Statističke metode korištene su za dokazivanje postavljenih hipoteza i analizu podataka dobivenih PRE- i POST-testovima. Za analizu su korišteni deskriptivni parametri (aritmetička sredina, standardna devijacija), dok je Mann-Whitney U test korišten za

upoređivanje postignuća PRE- i POST-testova između eksperimentalne i kontrolne grupe. Sve analize provedene su u statističkom programu IBM SPSS Statistics 29.0.

3.2 Instrumenti istraživanja

Instrumenti istraživanja uključivali su:

- **PRE-TEST** sa 7 pitanja, kojim se utvrdilo predznanje učenika i osigurala ravnopravnost eksperimentalne i kontrolne grupe.
- **POST-TEST** sa 10 pitanja, kojim se mjerilo postignuće učenika nakon provođenja eksperimentalnog programa.
- Završne ocjene iz matematike na kraju 7. razreda, korištene za dodatnu potvrdu ravnopravnosti grupa prije eksperimenta.

3.3 Uzorak istraživanja

U eksperimentalnoj grupi učestvovalo je $N = 31$ učenik (14 dječaka, 17 djevojčica). Eksperimentalni program trajao je od 19.10.2022. do 24.11.2022., obuhvatajući ukupno 8 časova obrade novog nastavnog sadržaja. Kontrolna grupa brojala je 16 učenika, koji su pratili klasičnu nastavu i radili PRE- i POST-testove radi upoređivanja rezultata.

3.4 Obrada podataka

Analiza podataka obuhvatila je:

- Deskriptivnu statistiku (aritmetička sredina, standardna devijacija).
- Mann-Whitney U test i medijanu za upoređivanje rezultata PRE- i POST-testova između eksperimentalne i kontrolne grupe.

4. Rezultati i diskusija

Prije izvođenja eksperimentalnog programa korištenja alata GeoGebra, provjerena je jednakost eksperimentalne i kontrolne grupe. Na osnovu zaključnih ocjena iz matematike na kraju 7. razreda i PRE-testa od 7 pitanja utvrđeno je da ne postoji statistički značajna razlika između grupa. Mann-Whitney U test pokazao je da su srednji rangovi i medijane obje grupe gotovo identični, što potvrđuje da su učenici eksperimentalne i kontrolne grupe imali približno isto predznanje. Time je osigurana validnost upoređivanja postignuća na POST-testu nakon provođenja eksperimentalnog programa.

	PRE-test
Mann-Whitney U	223,000
Wilcoxon W	359,000
Z	-0,576
Asymp. Sig. (2-tailed)	0,565

Tablica 1: Test Statistic Mann Whitney U testa na rezultatima PRE-testa

U Tablici 1 vrijednost Z je -0,576, uz nivo značajnosti $p = 0,565$. Iznos vjerovatnoće $p = 0,565$ nije manji ili jednak 0,05, pa rezultat Z nije značajan. To znači da nema statistički značajne razlike u rezultatima PRE-testa učenika eksperimentalne i kontrolne grupe, tj. nema statistički značajne razlike u predznanju učenika obje grupe.

	Grupa	N	Srednji rang	Suma rangova	Medijana
PRE-test	Eksperimentalna grupa	31	24,810	769,000	15,000
	Kontrolna grupa	16	22,440	359,000	15,000
	Ukupno	47			15,000

Tablica 2: Test rangova na rezultatima PRE-testa za eksperimentalnu i kontrolnu grupu

Nakon završenog eksperimentalnog programa, svi učenici su radili POST-test. Taj test je sadržavao 10 pitanja različitog tipa (definisanje, zaokruživanje tačnih odgovora, povezivanje pojmova, izračunavanje veličina i konstruisanje tačaka). Na testu se moglo osvojiti maksimalno 20 bodova. Dobijeni rezultati ukazuju da su učenici obje grupe u startu imali ujednačen nivo predznanja, što isključuje mogućnost da razlike u završnim postignućima proizlaze iz početnih sposobnosti ili ranijih iskustava. Raspodjela rangova pokazuje da su mediane i interkvartilni rasponi gotovo identični, čime je potvrđena homogenost uzorka i opravdanost primjene neparametrijskih metoda u daljoj analizi.

Time se osigurava interna validnost eksperimenta i omogućava da eventualne promjene u postignuću budu atribuirane upravo primjeni GeoGebre, a ne spoljnim faktorima.

Sljedeće dvije tabele prikazuju Mann-Whitney U test generisan na osnovu rezultata POST-testa.

	POST-test
Mann-Whitney U	143,000
Wilcoxon W	279,000
Z	-2,361
Asymp. Sig. (2-tailed)	0,018

Tablica 3: Test Statistic Mann Whitney U testa na rezultatima POST-testa

U Tablici 3 vrijednost Z je -2,361, uz nivo značajnosti $p = 0,018$. Iznos vjerovatnoće $p = 0,018$ je manji od 0,05 pa rezultat Z je statistički značajan. To znači da postoji statistički značajna razlike u rezultatima POST-testa učenika eksperimentalne i kontrolne grupe. To potvrđuje i Ranks tablica ispod.

	Grupa	N	Srednji rang	Suma rangova	Medijana
POST-test	Eksperimentalna grupa	31	27,390	849,000	7,5000
	Kontrolna grupa	16	17,440	279,000	4,250
	Ukupno	47			7,000

Tablica 4: Ranks tabela Mann-Whitney U testa na rezultatima POST-testa

U Tablici 4 prikazani su srednji rangovi, suma rangova i medijana za svaku grupu. Srednji rang eksperimentalne grupe je 27,390 i veći je od srednjeg ranga kontrolne grupe koji iznosi 17,440. Medijana eksperimentalne grupe iznosi 7,500 dok medijana kontrolne grupe iznosi 4,250. I ovo je pokazatelj statistički značajne razlike u rezultatima POST-testa učenika eksperimentalne i kontrolne grupe. Ostaje nam još ispitati statističke pokazatelje veličine uticaja Z . Pošto je $Z = -2,361$, a $N=47$, to je $r=0,344$. To bi se smatralo srednjim uticajem prema Cohen (1988) kriteriju (0,1=mali uticaj, 0,3=srednji uticaj, 0,5=veliki uticaj).

Može se zaključiti da je Mann-Whitney U test otkrio statistički značajnu razliku u rezultatima POST-testa učenika eksperimentalne i kontrolne grupe. Ovi nalazi jasno ukazuju na to da je eksperimentalni program, koji je uključivao primjenu alata GeoGebra, imao pozitivan efekat

na znanje učenika iz geometrije u odnosu na tradicionalni pristup poučavanju. Dobijeni rezultati potvrđuju da učenici bolje razumiju i primjenjuju geometrijske koncepte kada su aktivno uključeni u proces istraživanja i vizualizacije.

Učenici eksperimentalne grupe pokazali su viši nivo tačnosti u rješavanju zadataka koji zahtijevaju konstrukciju i interpretaciju geometrijskih odnosa, što sugerira da je vizualno-eksperimentalni pristup GeoGebre omogućio dublje konceptualno razumijevanje Pitagorine teoreme. Razlika između mediane postignuća (7,5 prema 4,25) ukazuje na razliku od više od tri boda u korist eksperimentalne grupe, što se u praktičnom smislu može smatrati pedagoški značajnim napretkom. Vrijednost efekta $r = 0,34$ predstavlja srednju veličinu uticaja prema Cohenovim kriterijima, što znači da primjena GeoGebre ima mjerljiv i obrazovno relevantan doprinos u poređenju s tradicionalnom nastavom.

Ovakvi rezultati potvrđuju da digitalni alati, kada su integrisani u proces učenja, ne djeluju samo kao tehničko sredstvo, već kao didaktički resurs koji olakšava kognitivne procese i podstiče aktivno konstruisanje znanja. Posebno se ističe povećan nivo angažovanosti, interesovanja i samostalnosti u radu učenika, što je u skladu s nalazima Bikić, Hrnjičić i Piljug-Zahirović (2020), koji su u svom istraživanju pokazali da formiranje GeoGebra grupe kao virtuelne učionice omogućava studentima da aktivno učestvuju u učenju i razvijaju dublje razumijevanje pojmova izometrijskih transformacija.

Cilj navedenog istraživanja u potpunosti je ostvaren kroz kreiranje GeoGebra grupe „Izometrijske transformacije u ravni“, unutar koje su studenti druge godine smjera Razredna nastava aktivno učestvovali u zadacima iz oblasti osne simetrije. Interaktivnost i dinamičnost postignuta učestvovanjem u GeoGebra okruženju doprinijele su boljem razumijevanju koncepta osne simetrije i razvijanju sposobnosti primjene stečenih znanja u novim situacijama. Slični efekti uočeni su i u ovom istraživanju, gdje su učenici zahvaljujući primjeni GeoGebre pokazali napredak u preciznosti konstrukcija, razumijevanju odnosa među elementima geometrijskih figura te u sposobnosti samostalnog donošenja zaključaka na osnovu vizuelnih i eksperimentalnih dokaza.

Time se potvrđuje da GeoGebra, osim što unapređuje kognitivne aspekte učenja, istovremeno razvija učenikovu sposobnost istraživanja i rješavanja problema na interaktivan način. Slične tendencije uočene su i u istraživanju Bikić, Kamber i Nesimović (2015), gdje su kvalitativni pokazatelji ukazali na rast interesovanja i angažovanosti učenika tokom rada s GeoGebrom, iako nije zabilježena značajna statistička razlika u postignućima između grupa. Takvi rezultati dodatno potvrđuju da efekti digitalnih alata nisu uvijek isključivo kvantitativno mjerljivi, već se manifestuju kroz promjene u motivaciji, fokusu i samostalnosti učenika.

Rezultati ovog istraživanja u potpunosti su u skladu i s nalazima Zakaria i saradnika (2024), koji potvrđuju da dinamičko vizualno istraživanje u GeoGebri razvija sposobnost učenika da samostalno otkrivaju odnose među elementima figura. Povećan prosječan rang i viša medijana eksperimentalne grupe ukazuju da primjena digitalnog alata ne samo da olakšava razumijevanje apstraktnih pojmova, već i podstiče samopouzdanje u matematičkom rezonovanju. Uočen efekat sugerira da učenici kojima je omogućeno interaktivno eksperimentisanje s geometrijskim objektima postižu dublje i trajnije razumijevanje nego oni koji rade isključivo simbolički i reproduktivno.

Posebno se ističe činjenica da su učenici eksperimentalne grupe postizali bolje rezultate u zadacima koji uključuju analizu odnosa između kvadrata nad katetama i hipotenuzom, što upućuje na dublje konceptualno razumijevanje, a ne samo na mehaničko pamćenje formule. Bikić i Pikula (2015) ukazuju na značaj korištenja dinamičkih apleta i interaktivne SmartBoard

table u istraživački orijentisanoj nastavi, gdje učenici samostalno eksperimentišu, mijenjaju parametre i dolaze do zaključaka o različitim oblicima jednačine prave. Sličan princip primijenjen je i u ovom istraživanju, gdje je GeoGebra korištena kao alat za istraživanje i vizualizaciju geometrijskih odnosa unutar Pitagorine teoreme, čime je potvrđeno da interaktivno učenje značajno doprinosi povećanju motivacije i postignuća učenika (Bikić i Pikula, 2015).

U konačnici, rezultati ukazuju da GeoGebra, kao savremeni obrazovni alat, ne samo da povećava akademska postignuća učenika, već i doprinosi razvoju pozitivnog stava prema matematici. Integracijom vizualizacije, istraživačkog pristupa i samostalnog rada, učenicima se omogućava da geometriju doživljavaju kao aktivan proces otkrivanja, a ne samo kao skup formula koje treba zapamtiti. Time se potvrđuje da digitalni alati, poput GeoGebre, imaju potencijal da značajno transformišu način na koji učenici uče, razumiju i primjenjuju matematičke koncepte.

5. Zaključak

Rezultati istraživanja pokazuju da primjena alata GeoGebra u nastavi geometrije ima pozitivan efekat na obrazovna postignuća učenika. Učenici eksperimentalne grupe, koji su učili uz pomoć posebno osmišljenih nastavnih jedinica i e-udžbenika, postigli su bolje rezultate na POST-testu u odnosu na učenike koji su pratili nastavu na tradicionalan način. Pored toga, korištenje GeoGebra alata povećalo je motivaciju učenika za učenje, omogućilo im lakše savladavanje gradiva i pružilo dodatnu fleksibilnost učenicima koji su izostajali s nastave.

Kreirani e-udžbenik omogućava javnu dostupnost nastavnog sadržaja, koji se može koristiti i unapređivati godinama, te poslužiti kao temelj za izradu novih zadataka i nastavnih jedinica. Osim što poboljšava postignuća učenika, ovaj pristup doprinosi i razvoju digitalne kompetencije kako nastavnika, tako i učenika. GeoGebra se, zahvaljujući svom širokom spektru mogućnosti, može implementirati i u druge oblasti matematike, pa čak i fizike, te se može koristiti u različitim oblicima nastave – od izvođenja lekcija do izrade zadataka za vježbu, domaće zadatke ili pripremu za test.

Istovremeno, istraživanje ukazuje na postojeća ograničenja u primjeni digitalnih tehnologija u školama. Ne postoji potpuna dostupnost uređaja i interneta za sve učenike, a mobilni uređaji ne podržavaju sve funkcionalnosti GeoGebra alata. Stoga, prilikom kreiranja nastavnih jedinica potrebno je koristiti opcije koje su podržane na svim uređajima, kako bi nastava bila dostupna svima. Iako još uvijek nije moguć potpuni prelazak na digitalni oblik izvođenja nastave, rezultati istraživanja potvrđuju da integracija alata GeoGebra značajno unapređuje kvalitet obrazovnog procesa i otvara nove mogućnosti za inovaciju u nastavi.

Ukupno posmatrano, nalazi potvrđuju da integracija GeoGebre u nastavu vodi ka kvantitativno boljem postignuću i kvalitativno bogatijem učenju. Takvi rezultati predstavljaju snažan argument za dalju primjenu digitalnih alata u obrazovanju, posebno u oblastima gdje je vizualno razumijevanje ključno za izgradnju apstraktnih matematičkih koncepata.

Primjena GeoGebre u nastavi geometrije ima značajan pozitivan uticaj na postignuća učenika. Dinamičke vizualizacije omogućavaju aktivno istraživanje i dublje razumijevanje odnosa u pravougloj trouglu. GeoGebra se pokazala kao efikasan alat za unapređenje znanja, motivacije i samopouzdanja učenika. Preporučuje se šira implementacija ovog alata u nastavi, kao i dalja istraživanja dugoročnih efekata njegove primjene.

Conclusion

The findings of this study show compelling proof that incorporating GeoGebra into geometry lessons has a favorable and statistically significant influence on students' ability to learn the Pythagorean theorem. Students who participated in the experimental program, which included GeoGebra-based activities and an e-textbook, performed much better on the post-test than students who followed a typical instructional method. Although there were no statistically significant differences between the experimental and control groups in pre-test and prior mathematics grades, the observed improvement can be attributed to GeoGebra use rather than differences in prior knowledge.

The findings show that GeoGebra encourages deeper conceptual knowledge through dynamic representation, interactive exploration, and active student interaction. Students in the experimental group performed significantly better on problems involving geometrical construction, interpretation, and analysis, implying that visual-experimental learning environments promote meaningful learning beyond procedural memorization. The measured effect size reveals a moderate but practically relevant influence, indicating that GeoGebra use leads to both statistically detectable gains and pedagogically important improvements in learning outcomes.

In addition to improved performance, GeoGebra deployment led to a greater motivation, engagement, and learner autonomy. The publicly available e-textbook created for this study gives flexibility in learning, assists students who miss classes, and allows for individual investigation. Furthermore, this method promotes the development of digital capabilities in both students and teachers, connecting mathematics education with the demands of modern, technologically advanced learning environments.

At the same time, the study underlines some of the limitations of integrating digital tools in educational environments, such as unequal device access and restricted mobile platform capability. These limits indicate that careful instructional design is required to ensure accessibility and diversity when implementing digital materials. While a complete transition to totally digital education is not yet possible, the findings show that even partial integration of GeoGebra improves the quality of the teaching and learning process.

Overall, the findings confirm that using GeoGebra improves both quantitative achievement and qualitative learning experiences. The study strongly supports the widespread use of dynamic geometry software in mathematics teaching, particularly in fields where visualization is critical to understand abstract concepts. Future research should look into the long-term impacts of GeoGebra use, its effect across mathematical areas, and strategies for overcoming technological and infrastructure challenges to wider implementation.

Literatura

- Arbain, N. and Shukor, N.A. (2015) 'The effects of GeoGebra on students' achievement', *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 172, pp. 208–214. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.356>
- Asare, J.T. and Atteh, E. (2022) 'The impact of using GeoGebra software in teaching and learning transformation (rigid motion) on senior high school students' achievement', *Asian Journal of Education and Social Studies*, 33(1), pp. 36–46. <https://doi.org/10.9734/ajess/2022/v33i130784>

Bedada, B.T. and Machaba, F. (2022) 'The effect of GeoGebra on STEM students' learning of trigonometric functions', *Cogent Education*, 9(1), pp. 1–16. <https://doi.org/10.1080/2331186X.2022.2034240>

Bikić, N. and Pikula, M. (2015) 'Unapređenje nastave analitičke geometrije kod usvajanja raznih oblika jednačine prave primjenom softverskog paketa GeoGebra i interaktivne SmartBoard table', *Quality Proceedings*, 9, pp. 403–408.

Bikić, N., Kamber, D. and Nesimović, S. (2015) 'GeoGebra u nastavi matematike – grafici linearnih i eksponencijalnih funkcija', *Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Zenici*, 13, pp. 165–176.

Bikić, N., Hrnjičić, A. and Piljug-Zahirović, M. (2020) "Upotreba digitalnog alata geogebra grupe u funkciji predstavljanja koncepta osne simetrije," *SaZnanje*, 1(2020), pp. 680–691. doi:10.65368/SAZNANJE20202020179.

Bjelanović Dijanić, N. (2010) *Konstruktivistički pristup u nastavi matematike*. Zagreb: Školska knjiga.

Bulut, M., Akçakın, H.Ü., Kaya, G. and Akçakın, V. (2016) 'The effects of GeoGebra on third-grade primary students' academic achievement in fractions', *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 11(2), pp. 347–355. <https://doi.org/10.29333/iejme/338>

Cohen, J. (1988) *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. 2nd edn. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

De Zan, I. (2005) *Metodika nastave prirode i društva*. Zagreb: Školska knjiga.

Kurnik, Z. (2008) *Metodika nastave matematike*. Zagreb: Element.

Muslim, N.E.I., Zakaria, M.I. and Fang, C.Y. (2023) 'A systematic review of GeoGebra in mathematics education', *International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development*, 12(3). <https://doi.org/10.6007/ijarped/v12-i3/19133>

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000) *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Oakley, B. and Lim, D. (2013) 'Effects of dynamic geometry software on students' understanding of geometry concepts', *Journal of Mathematics Education Research*, 7(2), pp. 55–68.

Piljug-Zahirović, M., Bikić, N., Kurtić, V. and Burgić, D. (2022) 'Povezanost motivacije i uspješnosti studenata nakon primjene obrazovnog softvera kod obrade izometrija u ravni', *Zbornik radova Filozofskog fakulteta Univerziteta u Zenici*, 19, pp. 185–203.

Research Discover Education (2024) 'Application of interactive software in classrooms: A case of GeoGebra in learning geometry in secondary schools in Uganda', *Research Discover Education*, 3(179). <https://doi.org/10.1007/s44217-024-00291-8>

Tall, D. (2000) 'Technology and advanced mathematical thinking', *Educational Studies in Mathematics*, 42(1), pp. 21–37.

Zakaria, M.I., Wong, W.S.C., Hanid, M.F.A., Adnan, M.F., Raimi, N.F. and Syed Azman, S.M. (2024) 'Integrating geometrical design with GeoGebra: Effects on motivation and academic performance among secondary students', *Mathematics Teaching Research Journal*, 16(5), pp. 186–217.

Zulnaldi, H. and Syed Zamri, S.N.A. (2017) 'The effectiveness of the GeoGebra software: The intermediary role of procedural knowledge on students' conceptual knowledge and their achievement in mathematics', *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), pp. 2155–2180. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01219a>