

Hermina Alajbegović
Almir Huskanović
Safet Hamedović

ANALIZA PERFORMANSI ROBOTA POMOĆU FUZZY GRAFOVA I FUZZY C-MEANS ALGORITMA

Sažetak

U ovom radu prikazujemo pristup analizi performansi robota koji kombinuje dva komplementarna koncepta: fuzzy grafove i Fuzzy C-Means (FCM) algoritam. Cilj rada je pokazati kako se tačnost i ponovljivost robota mogu objediniti u jedinstvenu mjeru pouzdanosti, te kako se ta mjera može dalje koristiti u formiranju fuzzy indeksa sličnosti između robota.

Primijenjen na skupu od 16 simuliranih robota, FCM algoritam formira četiri jasno razdvojena klastera s prosječnom pripadnošću od 0.97. Dobivene vrijednosti pripadnosti koriste se kao fuzzy težine za konstrukciju fuzzy grafa, čija analiza pokazuje da se, za prag sličnosti $\tau = 0.95$ struktura mijenja sa četiri na šest klastera, a 87.5% robota ostaje povezano u stabilnim podgrupama.

Na taj način omogućeno je dublje razumijevanje odnosa između robota – s jedne strane kroz grafovsku strukturu s fuzzy težinama, a s druge strane kroz grupisanje robota na osnovu fuzzy pripadnosti klasterima. Ovakav hibridni pristup doprinosi boljem sagledavanju strukture performansi i može imati praktičnu primjenu u održavanju robota i alokaciji zadataka.

Ključne riječi: fuzzy grafovi, Fuzzy C-Means algoritam, analiza performansi robota, tačnost i ponovljivost, klasterovanje robota.

PERFORMANCE ANALYSIS OF ROBOTS USING FUZZY GRAPHS AND THE FUZZY C-MEANS ALGORITHM

Abstract

This paper presents an approach to robot performance analysis that combines two complementary concepts: fuzzy graphs and the Fuzzy C-Means (FCM) algorithm. The goal of the paper is to demonstrate how robot accuracy and repeatability can be combined into a unified reliability measure, and how this measure can be further used to form a fuzzy similarity index between robots.

When applied to a dataset of 16 simulated robots, the FCM algorithm forms four clearly separated clusters with an average membership degree of 0.97. The obtained membership values are then used as fuzzy weights for the construction of a fuzzy graph. The analysis of this graph shows that, for a similarity threshold of $\tau = 0.95$, the structure changes from four to six clusters, while 87.5% of the robots remain connected within stable subgroups.

This approach enables a deeper understanding of the relationships between robots—on one hand through graph structures with fuzzy weights, and on the other hand through grouping robots based on fuzzy cluster membership. Such a hybrid approach contributes to better insight into the performance structure and may have practical applications in robot maintenance and task allocation.

Keywords: *fuzzy graphs, Fuzzy C-Means algorithm, robot performance analysis, accuracy and repeatability, robot clustering.*

1. UVOD

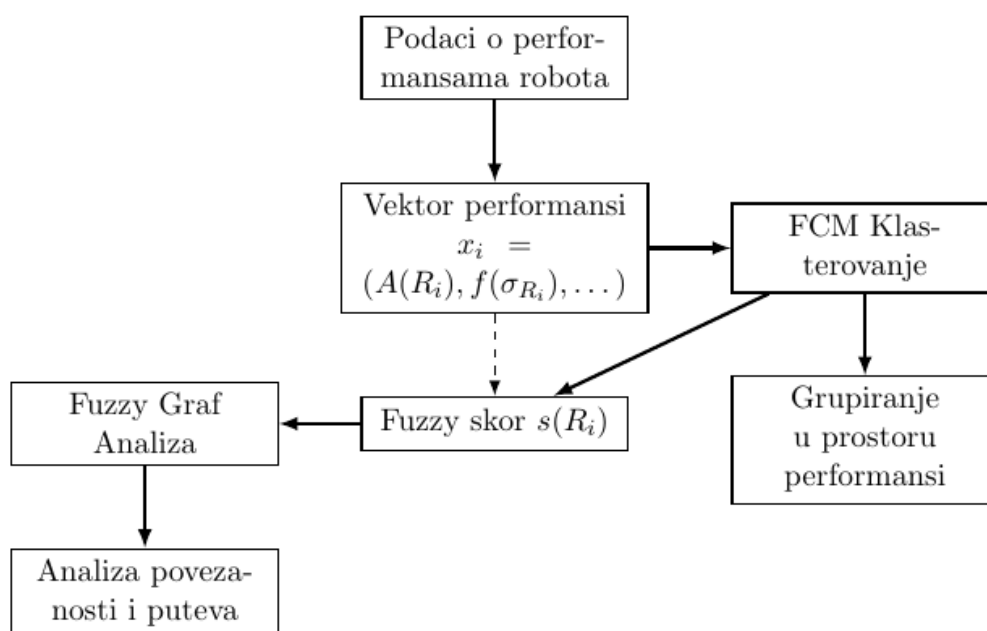
Analiza performansi robota zahtijeva precizne metode za procjenu i poređenje njihovih karakteristika. Dvije ključne mjere koje se u tu svrhu koriste su *tačnost* i *ponovljivost* [20, 10]. Tačnost opisuje odstupanje izmjerene vrijednosti od idealne, dok ponovljivost predstavlja stabilnost rezultata pri ponovljenim mjerenjima pod istim uslovima [20].

Ove dvije mjere moguće je objediniti u zajednički pokazatelj pouzdanosti koji ćemo označiti kao *stepen pouzdanosti robota*. Korištenjem fuzzy pristupa možemo opisati stepen neizvjesnosti i preklapanja između performansi različitih robota, što je posebno korisno kada su granice između „dobrog“ i „lošeg“ robota neprecizne [27]. Na taj način, fuzzy pristup omogućava definisanje lingvističkih ocjena pouzdanosti (npr. „nizak“, „srednji“, „visok“ stepen pouzdanosti) umjesto strogo oštih pragova.

Fuzzy logika i dalje je aktivan predmet istraživanja u robotici, što pokazuju brojni recentni radovi. Primjene uključuju poboljšane kontrolere za navigaciju mobilnih robota u nepoznatim okruženjima [2, 22], hibridne fuzzy-ekspertne sisteme za upravljanje robotskim manipulatorima [4], te napredne strategije upravljanja za robotske sisteme s ograničenjima [26]. Ovi radovi potvrđuju trajnu vrijednost fuzzy pristupa za rješavanje kompleksnih problema u robotici.

U ovom radu koristimo dva komplementarna pristupa:

- pristup baziran na **fuzzy grafovima**, u kojem se odnosi između robota modeliraju fuzzy relacijama [16, 13, 12] i
- pristup baziran na **Fuzzy C-Means algoritmu**, kojim se roboti grupišu u klastere prema stepenima pripadnosti [3, 6].



Slika 1: Shematski prikaz komplementarnog pristupa analizi performansi robota. Fuzzy skor $s(R_i)$ primarno se definira na temelju rezultata FCM klasterovanja ($s(R_i) = \max_j u_{ij}$), a zatim se koristi za izgradnju fuzzy grafa.

2. FUZZY C-MEANS ALGORITAM

Fuzzy C-Means (FCM) algoritam je jedan od najpoznatijih algoritama za fuzzy klasterovanje [3]. Za razliku od klasičnih metoda (npr. k-means [6]), gdje svaki element pripada samo jednom klasteru, FCM omogućava da svaki element pripada svakom klasteru s određenim *stepenom pripadnosti* između 0 i 1.

Algoritam minimizira funkciju cilja:

$$J_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^C u_{ij}^m \|x_i - c_j\|^2,$$

uz sljedeća ograničenja:

$$\sum_{j=1}^C u_{ij} = 1 \quad \text{za svaki } i = 1, \dots, N, \quad \text{ i } \quad u_{ij} \in [0,1],$$

gdje je:

- N – broj elemenata (npr. robota),
- C – broj klastera,
- u_{ij} – stepen pripadnosti elementa x_i klasteru j ,
- $m > 1$ – fuzzy parametar koji određuje stepen „zamućenosti“ klastera [3],
- c_j – centar klastera j ,
- $\|x_i - c_j\|$ – udaljenost između elementa i centra klastera (najčešće Euklidova).

Minimizacija funkcije cilja uz navedena ograničenja provodi se metodom Lagrangeovih multiplikatora, što dovodi do iterativnog postupka koji se sastoji od alternirajućeg ažuriranja centara klastera i stepena pripadnosti.

Vektor performansi robota: Svaki robot R_i predstavlja se kao vektor svojih ključnih performansi:

$$x_i = (A(R_i), f(\sigma_{R_i}), v(R_i), E(R_i), \dots) \in \mathbb{R}^d,$$

gdje su $A(R_i)$ tačnost, $f(\sigma_{R_i})$ standardizirana ponovljivost, $v(R_i)$ brzina, $E(R_i)$ potrošnja energije i ostale relevantne karakteristike. Razlika između dva vektora procjenjuje se Euklidovom normom $\|x_i - c_j\|$.

Iterativni postupak FCM algoritma:

1. Odaberu se inicijalne vrijednosti stepena pripadnosti u_{ij} (obično nasumično, uz ograničenje $\sum_{j=1}^C u_{ij} = 1$) [3].
2. Ažuriraju se centri klastera formulom:

$$c_j = \frac{\sum_{i=1}^N u_{ij}^m x_i}{\sum_{i=1}^N u_{ij}^m}.$$

3. Ažuriraju se stepeni pripadnosti:

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^C \left(\frac{\|x_i - c_j\|}{\|x_i - c_k\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}}.$$

4. Postupak se ponavlja dok promjene u matrici $U = [u_{ij}]$ ne padnu ispod zadanog praga.

Parametar $m > 1$ kontroliše stepen zamućenosti klastera. Kada je m blizu 1, pripadnosti podataka klasterima postaju vrlo oštre, tj. svaki podatak pripada gotovo u potpunosti jednom klasteru, slično klasičnom k-means algoritmu. Kako se m povećava, pripadnosti postaju mekše i ravnomjernije raspoređene između klastera, što omogućava da podaci imaju djelomično članstvo u više klastera. U praksi se često uzima $m = 2$, što daje dobar kompromis između jasnoće klastera i fuzzy pripadnosti [3].

Izbor broja klastera C može se izvršiti na nekoliko načina:

- **Eksperimentalno:** isprobavanjem različitih vrijednosti C i odabirom one koja daje najinformativnije i stabilne klastere.
- **Metode valjanosti klastera:** koriste se mjere poput siluete, indeks Davies-Bouldina ili indeks Xie-Beni za ocjenu kvaliteta klastera i optimizaciju C [3].
- **Teorijsko ili praktično ograničenje:** broj klastera se bira prema očekivanoj strukturi podataka ili praktičnoj upotrebi, npr. prema broju kategorija performansi robota koje želimo razlikovati.

Nakon FCM klasterovanja, za svakog robota R_i možemo izračunati **stepen sigurnosti klastera** kao maksimalnu vrijednost pripadnosti:

$$\text{sigurnost}(R_i) = \max_j u_{ij}.$$

Ova mjera indicira koliko je robot definitivno pridružen svom primarnom klasteru. Više vrijednosti ukazuju na veću sigurnost klasifikacije [25].

Važno je napomenuti da pojam *klastera* u fuzzy grafu i u FCM algoritmu nema isto značenje:

- U Fuzzy C-Means algoritmu, klaster označava grupu objekata koji dijele slične karakteristike i formiraju se optimizacijom funkcije cilja koristeći **Euklidovu metriku** ili neku sličnu metriku na prostoru karakteristika [3].
- U fuzzy grafu, klasteri proizlaze iz *stepena povezanosti* među čvorovima grafa i definisani su fuzzy relacijama sličnosti $\mu(R_i, R_j)$, koje se baziraju na vrijednostima fuzzy skora $s(R_i)$ robota [13].

Drugim riječima, FCM koristi **vektorske karakteristike i geometrijsku metriku**, dok fuzzy graf modelira **relacije sličnosti i puteve** između robota kroz fuzzy indekse. Tako se oba pristupa mogu komplementarno koristiti: FCM za grupisanje u prostoru karakteristika, a fuzzy graf za analizu međusobne sličnosti i povezanosti [18].

3. FUZZY GRAFOVI I ANALIZA PERFORMANSI ROBOTA

U ovom poglavlju sistematski opisujemo teorijsku osnovu koja kombinuje fuzzy relacije, funkcije sličnosti i fuzzy grafove za analizu performansi robota, uključujući definiciju ključnih parametara, metrika, fuzzy skora i klastera [13, 16, 18, 12, 24].

3.1 Fuzzy relacije

Fuzzy relacija predstavlja proširenje klasične (binarne) relacije u okviru teorije fuzzy skupova, pri čemu se umjesto binarne pripadnosti uvodi *stepen pripadnosti* iz intervala $[0,1]$. Formalno, fuzzy relacija R između skupova X i Y definiše se kao fuzzy skup na *Kartezijevom proizvodu* $X \times Y$, odnosno kao funkcija pripadnosti

$$\mu_R: X \times Y \rightarrow [0,1].$$

Fuzzy relacije omogućavaju opisivanje nepreciznih, nesigurnih i djelomično poznatih odnosa, što ih čini vrlo korisnim alatom u područjima kao što su fuzzy logika, baze podataka, sistemi za donošenje odluka i analiza složenih podataka [27].

3.2 Osnovni pojmovi: t-norma i t-conorma

Za definisanje osnovnih operacija nad fuzzy relacijama (poput presjeka, unije i kompozicije) potrebno je uvesti pojmove t-norme i t-conorme. U suštini, ove funkcije određuju kako se kombinuju stepeni pripadnosti: t-norma formalizira logičku konjunkciju (operaciju "I" odnosno presjek skupova), a t-conorma logičku disjunkciju (operaciju "ILI" odnosno uniju skupova).

Definicija 1 (t-norma). *t-norma* (triangularna norma) je funkcija $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ koja za sve $a, b, c \in [0,1]$ ima sljedeća svojstva:

1. **Komutativnost:** $T(a, b) = T(b, a)$
2. **Asocijativnost:** $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$
3. **Monotonost:** ako $a \leq b$, tada $T(a, c) \leq T(b, c)$
4. **Granični uslov (identitet):** $T(a, 1) = a$

Definicija 2 (t-conorma). *t-conorma* (triangularna konorma) je funkcija $S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ koja za sve $a, b, c \in [0,1]$ ima sljedeća svojstva:

1. **Komutativnost:** $S(a, b) = S(b, a)$
2. **Asocijativnost:** $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$
3. **Monotonost:** ako $a \leq b$, tada $S(a, c) \leq S(b, c)$
4. **Granični uslov (identitet):** $S(a, 0) = a$

Definicija 3 (Dualnost). Neka je $n: [0,1] \rightarrow [0,1]$ standardna negacija, $n(a) = 1 - a$. Kažemo da su t-norma T i t-conorma S *dualne* (povezane De Morganovim zakonima) ako za sve $a, b \in [0,1]$ vrijedi:

$$S(a, b) = n(T(n(a), n(b))) \quad \text{odnosno} \quad S(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b),$$

i obrnuto,

$$T(a, b) = n(S(n(a), n(b))) \quad \text{odnosno} \quad T(a, b) = 1 - S(1 - a, 1 - b).$$

Sljedeći parovi funkcija čine dualne t-norme i t-conorme u smislu Definicije 3.

- **Minimum i maksimum:**

$$T_{\min}(a, b) = \min(a, b) \text{ (najslabija karika)}$$

$$S_{\max}(a, b) = \max(a, b) \text{ (najjača alternativa)}$$

- **Algebarski proizvod i probabilitički zbir:**

$$T_{\text{prod}}(a, b) = a \cdot b \quad (\text{postepeno umanjeње})$$

$$S_{\text{sum}}(a, b) = a + b - a \cdot b \quad (\text{kumulativni efekt})$$

- **Lukasiewiczov par:**

$$T_{\text{Luk}}(a, b) = \max(0, a + b - 1) \text{ (stroga konjunkcija)}$$

$$S_{\text{Luk}}(a, b) = \min(1, a + b) \quad (\text{ograničena disjunkcija})$$

Detaljna svojstva i primjene t-normi i t-conormi obrađena su u [1, 9, 11].

3.3 Funkcija sličnosti kao specijalan tip fuzzy relacije

Posebno važan tip fuzzy relacije je *funkcija sličnosti*, koja se koristi za kvantifikovanje stepena sličnosti između dva objekta. Funkcija sličnosti $\mu_S: X \times X \rightarrow [0,1]$ je fuzzy relacija koja obično zadovoljava sljedeća svojstva:

1. **Refleksivnost:** $\mu_S(x, x) = 1$ za sve $x \in X$ (svaki element je potpuno sličan samom sebi)
2. **Simetričnost:** $\mu_S(x, y) = \mu_S(y, x)$ za sve $x, y \in X$ (sličnost je dvosmjerna)
3. **T-tranzitivnost:** $\mu_S(x, z) \geq T(\mu_S(x, y), \mu_S(y, z))$ za neku t-normu T (sličnost se prenosi kroz posrednike)

Funkcije sličnosti mogu se konstruisati koristeći različite metrike, poput kosinusne sličnosti, Jaccardovog indeksa ili euklidske udaljenosti transformisane u sličnost [15, 5].

3.4 Najčešći modeli fuzzy relacija

Na osnovu pregleda literature mogu se izdvojiti tri osnovna modela fuzzy relacija sa širokom primjenom:

1. **Temeljen na t-normama za kompoziciju relacija.**

Ovaj model koristi t-norme za definisanje kompozicije fuzzy relacija. Neka su $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq Y \times Z$ fuzzy relacije. Tada je njihova kompozicija $R \circ S$ data s:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in Y} T(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)),$$

gdje je T odabrana t-norma. Ova formula odgovara na pitanje: “Koliko je element x povezan s elementom z kroz relacije R i S ?” Odgovor je najjača veza preko svih mogućih posrednika y . Ovaj pristup, detaljno opisan u [1], omogućava modularnu izgradnju složenih fuzzy sistema i često se koristi u fuzzy kontrolerima i sistemima za donošenje odluka.

2. Temeljen na mjerama sličnosti.

Ovaj model ima centralnu ulogu u klasterovanju podataka, gdje se fuzzy relacija sličnosti definiše direktno pomoću funkcije $\mu_R(x, y)$ koja kvantificira stepen sličnosti između elemenata. Takva relacija se može izgraditi iz podataka koristeći standardne metrike sličnosti poput kosinusne ili Jaccardovog indeksa [15, 5]. Pored klasterovanja, model se primjenjuje i u izgradnji inteligentnih sistema za preporuke, gdje omogućava pronalaženje sličnih stavki na osnovu fuzzy mjera sličnosti. U ovom radu koristimo upravo ovaj model za definisanje relacija u fuzzy grafu robota.

3. Temeljen na fuzzy funkcionalnim zavisnostima.

FFZ opisuju obrasce: "Što su instance sličnije po X , to su sličnije po Y ". Formalno, FFZ $X \leadsto Y$ vrijedi ako za bilo koja dva objekta a i b vrijedi $\mu_X(a, b) \leq \mu_Y(a, b)$, gdje μ_X i μ_Y označavaju odgovarajuće funkcije sličnosti [21]. U analizi performansi robota, FFZ poput $\{\text{Tačnost, Ponovljivost}\} \leadsto \{\text{Potrošnja energije}\}$ postavlja očekivanje da roboti slični po tačnosti i ponovljivosti budu slični i po potrošnji energije. **Kršenje ove zavisnosti** ima konkretne implikacije. Primjerice, ako se nađu dva robota s vrlo visokom sličnošću po tačnosti i ponovljivosti ($\mu_X \approx 0.9$), ali s potpuno različitom potrošnjom energije ($\mu_Y < 0.3$), to ukazuje na jednu od dvije stvari: (1) postoji *outlier* (robot s atipičnom karakteristikom) koji zahtijeva daljnju analizu, ili (2) model treba proširiti dodatnim metrikama (npr. tip motora, starost komponenti) koje bolje objašnjavaju potrošnju energije. Time FFZ služe kao alat za otkrivanje anomalija i poboljšanje modela.

3.5 Fuzzy grafovi

Fuzzy graf proširuje koncept klasičnog grafa uvodeći stepene pripadnosti za čvorove i ivice, direktno koristeći fuzzy relacije.

Definicija 1 (Fuzzy graf). *Fuzzy graf je četvorka $G = (V, E, \sigma, \mu)$, gdje je:*

- V skup čvorova (npr. robota),
- $E \subseteq V \times V$ skup ivica,
- $\sigma: V \rightarrow [0,1]$ funkcija stepena članstva čvorova,
- $\mu: V \times V \rightarrow [0,1]$ funkcija stepena članstva ivica, pri čemu vrijedi $\mu(x, y) \leq \min(\sigma(x), \sigma(y))$ za sve $x, y \in V$.

Napomena: Funkcija μ je fuzzy relacija na skupu V ; u praksi se često koristi kao funkcija sličnosti između čvorova, što fuzzy graf čini prirodnim alatom za analizu odnosa sličnosti.

Definicija 2 (Fuzzy klaster). *Za prag $\tau \in (0,1)$, klaster $C \subseteq V$ definira se kao skup čvorova koji zadovoljava:*

- *Za sve $x, y \in C$ postoji nesmetan put između x i y takav da za svaku ivicu (u, v) na putu vrijedi $\mu(u, v) \geq \tau$.*
- *Za svaki $z \notin C$ postoji barem jedan $w \in C$ takav da $\mu(w, z) < \tau$.*

3.6 Performanse robota

Za svakog robota R mjerimo osnovne performanse [10, 20]:

- **Tačnost (Accuracy):** Omjer uspješnih pokušaja T u ukupno N izvršenih zadataka:

$$A(R) = \frac{T}{N}, \quad 0 \leq A(R) \leq 1.$$

- **Ponovljivost (Repeatability):** Varijabilnost rezultata. Ako su $x_1, x_2, \dots, x_n$ položaji na kojima predmet završi, prosječna pozicija je

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

a standardna devijacija (varijacija) je

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Manja σ_R ukazuje na bolju ponovljivost. Standardiziramo ponovljivost na interval $[0,1]$ pomoću transformacije:

$$f(\sigma_R) = \frac{1}{1 + \sigma_R}.$$

3.7 Transformacija ponovljivosti

Da bi se ponovljivost standardizirala u $[0,1]$, koriste se različite funkcije transformacije. Sve funkcije daju veće vrijednosti za bolju ponovljivost [14]:

- Racionalna: $f(\sigma_R) = \frac{1}{1 + \sigma_R}$
- Eksponencijalna: $f(\sigma_R) = e^{-k\sigma_R}, \quad k > 0$
- Linearna: $f(\sigma_R) = 1 - \frac{\sigma_R}{\sigma_{\max}}$
- Gaussova: $f(\sigma_R) = e^{-\frac{\sigma_R^2}{2\sigma_0^2}}$
- Fuzzy membership s pragovima:

$$f(\sigma_R) = \begin{cases} 1, & \sigma_R \leq \sigma_{\text{low}} \\ \frac{\sigma_{\text{high}} - \sigma_R}{\sigma_{\text{high}} - \sigma_{\text{low}}}, & \sigma_{\text{low}} < \sigma_R < \sigma_{\text{high}} \\ 0, & \sigma_R \geq \sigma_{\text{high}} \end{cases}$$

3.8 Fuzzy skor funkcija i ukupni stepen pouzdanosti

Neka je $s(R_i)$ fuzzy skor funkcija koja mjeri ukupni stepen pouzdanosti robota R_i . Pojam fuzzy skora zasniva se na principima fuzzy višekriterijskog odlučivanja [5, 14, 28], gdje se različite

karakteristike sistema kombinuju u jednu agregiranu mjeru. U ovom radu razmatramo dva pristupa njenom definisanju.

1. Fuzzy skor baziran direktno na performansama

Fuzzy skor se može definisati direktno na osnovu performansi robota, uzimajući u obzir više kriterija kao što su tačnost, ponovljivost i potrošnja energije [5, 14]. Opšti oblik može se izraziti kao:

$$s(R_i) = g(A(R_i), f(\sigma_{R_i}), \dots),$$

gdje funkcija g kombinuje različite standardizirane performanse (npr. tačnost A , ponovljivost σ_{R_i} , brzinu V , energiju E) u jedinstvenu mjeru pouzdanosti. Ovaj pristup koristi fuzzy skor kao **nezavisnu ulaznu mjeru** za oba pristupa: kako za Fuzzy C-Means klasterovanje (kao komponentu vektora performansi), tako i za izgradnju fuzzy grafa [5, 16, 13].

Primjeri mogućih funkcionalnih oblika fuzzy skora baziranog na performansama robota [14, 5]:

- **Jednostavan prosjek:**

$$s(R_i) = \frac{A(R_i) + f(\sigma_{R_i})}{2},$$

gdje je $f(\sigma_{R_i}) = \frac{1}{1 + \sigma_{R_i}}$ standardizirana mjera ponovljivosti.

- **Težinski prosjek:**

$$s(R_i) = w \cdot A(R_i) + (1 - w) \cdot f(\sigma_{R_i}), \quad w \in [0,1].$$

- **Eksponencijalna transformacija:**

$$s(R_i) = A(R_i) \cdot e^{-k\sigma_{R_i}}, \quad k > 0.$$

- **Gaussova transformacija:**

$$s(R_i) = A(R_i) \cdot e^{-\frac{\sigma_{R_i}^2}{2\sigma_0^2}}.$$

- **Više osobina:**

$$s(R_i) = \sum_{k=1}^M w_k \cdot f_k(P_k(R_i)), \quad \sum_{k=1}^M w_k = 1,$$

gdje f_k standardizuje k -tu osobinu na $[0,1]$. Time se omogućava fleksibilan i proširiv model fuzzy grafa i klastera [5, 18].

2. Fuzzy skor baziran na rezultatima FCM klasterovanja

Alternativno, fuzzy skor se može definisati na osnovu rezultata FCM algoritma [3, 6]:

$$s(R_i) = \max_j u_{ij},$$

gdje u_{ij} označava stepen pripadnosti robota R_i klasteru j . U ovom pristupu, FCM klasterovanje prethodi formiranju fuzzy skora, a skor izražava stepen pouzdanosti na osnovu stabilnosti pripadnosti određenom klasteru.

U eksperimentalnom dijelu ovog rada korišten je drugi pristup, gdje je fuzzy skor izveden iz FCM matrice pripadnosti. Standardizacija u intervalu $[0,1]$ osigurava kompatibilnost sa definicijama fuzzy relacija i funkcija udaljenosti [5, 25, 11].

Ovakav pristup omogućava integrisano modeliranje pouzdanosti robota, gdje fuzzy skor služi kao most između fuzzy odlučivanja i fuzzy klasterovanja [14, 3, 5].

3.9 Teorijski okvir: alternativni pristupi fuzzy relaciji sličnosti i analizi grafova

U teoriji fuzzy grafova, fuzzy relacija sličnosti između robota može se definirati na različite načine. Jedan od pristupa je korištenje fuzzy skora $s(R_i)$ koji mjeri ukupni stepen pouzdanosti robota. Tada se **fuzzy relacija sličnosti** između robota R_i i R_j može definisati korištenjem različitih t-normi:

- Minimum t-norma: $\mu(R_i, R_j) = \min\{s(R_i), s(R_j)\}$
- Proizvod: $\mu(R_i, R_j) = s(R_i) \cdot s(R_j)$
- Prosjek: $\mu(R_i, R_j) = \frac{s(R_i) + s(R_j)}{2}$
- Geometrijska sredina: $\mu(R_i, R_j) = \sqrt{s(R_i) \cdot s(R_j)}$
- Lukasiewicz t-norma: $\mu(R_i, R_j) = \max(0, s(R_i) + s(R_j) - 1)$

Veća vrijednost μ znači da su roboti sličniji, dok manja vrijednost μ ukazuje na slabiju sličnost [15].

Nakon definisanja fuzzy relacije sličnosti, može se konstruisati fuzzy graf. Jedan od pristupa za analizu takvog grafa je definisanje **funkcije udaljenosti** između čvorova. Neka je $\rho = (R_{i_0}, \dots, R_{i_n})$ put između čvorova. Jedna od mogućih funkcija dužine puta je aditivna transformacija [13, 28, 24]:

$$l(\rho) = \sum_{j=1}^n (1 - \mu(R_{i_{j-1}}, R_{i_j})).$$

Ova transformacija je prirodan izbor jer direktno preslikava stepen sličnosti $[0,1]$ u metrički prostor udaljenosti $[0,1]$, gdje manja udaljenost odgovara većoj sličnosti. Ova funkcija zadovoljava osnovne metričke uslove kada se koristi za pronalaženje najkraćeg puta.

Postoje i druge funkcije za računanje dužine puta, na primjer:

- Eksponencijalna: $l(\rho) = \sum_{j=1}^n e^{1 - \mu(R_{i_{j-1}}, R_{i_j})}$

Najkraća udaljenost između robota R_i i R_j je:

$$\delta(R_i, R_j) = \min_{\rho \in \mathcal{P}(R_i, R_j)} l(\rho),$$

gdje $\mathcal{P}(R_i, R_j)$ predstavlja skup svih puteva između R_i i R_j .

Manja vrijednost δ znači veću sličnost performansi između robota. Dakle, veće μ i manja δ oba ukazuju na veću sličnost.

Prema [13, 24], klasteri se mogu definisati pomoću funkcije udaljenosti δ . Za zadani prag $\epsilon > 0$, klaster C je skup čvorova takav da je udaljenost između bilo koja dva čvora u C najviše ϵ **pri čemu ne postoji čvor izvan skupa C koji bi mogao biti uključen u klaster bez narušavanja ovog uslova**. Čvorovi koji ne pripadaju niti jednom klasteru nazivaju se *outlieri* i predstavljaju robote s atipičnim performansama.

Važno je napomenuti da postoje različiti pristupi definisanju klastera u fuzzy grafovima. U prethodnom poglavlju uvedena je definicija fuzzy klastera zasnovana na pragu τ nad samom relacijom sličnosti μ . Taj pristup, koji se koristi u eksperimentalnom dijelu ovog rada, direktno koristi fuzzy relaciju sličnosti bez prethodne transformacije u udaljenost.

Izbor konkretne funkcije fuzzy skora, t-norme i metode za definisanje klastera ovisi o prirodi podataka i ciljevima analize. U praksi se koriste dva glavna pristupa:

- **Eksperimentalni:** isprobamo više funkcija i parametara, a zatim odaberemo one koji daju najinformativnije klastere i relacije.
- **Teorijski:** odabir funkcije temeljen na značenju performansi i očekivanom ponašanju robota, npr. korištenje minimum t-norme kada želimo da cijela linija veza bude jaka da bi robote smatrali sličnima [14].

4. USPOREDNA PRIMJENA FUZZY C-MEANS KLASTEROVANJA I FUZZY GRAF ANALIZE NA SKUP PODATAKA ROBOTA

U ovom primjeru korišten je *Python* za generisanje i analizu podataka robota pomoću Fuzzy C-Means (FCM) klasterovanja [3]. Podaci su simulirani za četiri različite skupine robota, definisane kombinacijom tačnosti i ponovljivosti:

- Tačni i ponovljivi
- Tačni ali neponovljivi
- Netačni ali ponovljivi
- Netačni i neponovljivi

Za generiranje podataka korištena je funkcija *np.random.normal* iz paketa *numpy*, koja omogućava stvaranje slučajnih vrijednosti tačnosti i ponovljivosti prema normalnoj distribuciji. Standardna devijacija je mala kako bi se simulirala realistična varijacija unutar svake skupine. Da bi generiranje bilo reproducibilno, korištena je naredba *np.random.seed(42)*.

U nastavku je prikazan Python kod koji stvara podatke za četiri skupine robota:

```
import numpy as np
np.random.seed(42)

group1 = np.random.normal([0.85, 0.85], 0.05, size=(4, 2))
group2 = np.random.normal([0.85, 0.35], 0.05, size=(4, 2))
group3 = np.random.normal([0.35, 0.85], 0.05, size=(4, 2))
group4 = np.random.normal([0.35, 0.35], 0.05, size=(4, 2))
robots = np.vstack((group1, group2, group3, group4))
```

Nakon izvršavanja ovog koda, dobiveni su podaci prikazani u Tabeli 1:

SIMULIRANI PODACI O ROBOTIMA					
	RB	Tačnost	Ponovljivost	Originalna grupa	
0	1	0.8748	0.8431	Tačni i ponovljivi	
1	2	0.8824	0.9262	Tačni i ponovljivi	
2	3	0.8383	0.8383	Tačni i ponovljivi	
3	4	0.929	0.8884	Tačni i ponovljivi	
4	5	0.8265	0.3771	Tačni ali neponovljivi	
5	6	0.8268	0.3267	Tačni ali neponovljivi	
6	7	0.8621	0.2543	Tačni ali neponovljivi	
7	8	0.7638	0.3219	Tačni ali neponovljivi	
8	9	0.2994	0.8657	Netačni ali ponovljivi	
9	10	0.3046	0.7794	Netačni ali ponovljivi	
10	11	0.4233	0.8387	Netačni ali ponovljivi	
11	12	0.3534	0.7788	Netačni ali ponovljivi	
12	13	0.3228	0.3555	Netačni i neponovljivi	
13	14	0.2925	0.3688	Netačni i neponovljivi	
14	15	0.32	0.3354	Netačni i neponovljivi	
15	16	0.3199	0.4426	Netačni i neponovljivi	
Ukupno robota: 16					

Tabela 1: Simulirani podaci o performansama 16 robota: tačnost i ponovljivost za četiri predefinisane grupe

FCM je implementiran korištenjem ugrađene funkcije `fuzz.cluster.cmeans` iz Python paketa `scikit-fuzzy`. Broj klastera je postavljen na 4, a parametar zamućenosti $m = 2$ odražava standardnu razinu „fuzzy“ pripadnosti [3]. Funkcija vraća matricu članstva U i centre klastera $cntr$. Za svakog robota klaster s najvećim članstvom određuje se naredbom `np.argmax(U, axis=0)`.

U nastavku je prikazan Python kod koji izvodi FCM klasterovanje nad podacima robota:

```
import skfuzzy as fuzz
import numpy as np

n_clusters = 4
cntr, U, _, _, _ = fuzz.cluster.cmeans(
    robots.T, c=n_clusters, m=2, error=0.005, maxiter=1000
)
cluster_membership = np.argmax(U, axis=0)
```

Svaki centar klastera ispisan je zajedno s prosječnom tačnošću i ponovljivošću, a centri su povezani s nazivom klastera prema njihovim koordinatama:

- **Netačni ali ponovljivi:**
 - Prosječna tačnost: 0.344
 - Prosječna ponovljivost: 0.814
- **Netačni i neponovljivi:**
 - Prosječna tačnost: 0.314
 - Prosječna ponovljivost: 0.374
- **Tačni i ponovljivi:**
 - Prosječna tačnost: 0.881
 - Prosječna ponovljivost: 0.874
- **Tačni ali neponovljivi:**
 - Prosječna tačnost: 0.820
 - Prosječna ponovljivost: 0.321

Za daljnju analizu uvodi se fuzzy graf čiji čvorovi predstavljaju robote, dok je njihov fuzzy skor jednak stepenu pripadnosti klasteru s najvećim članstvom u FCM-u. Relacija između dva robota definiše se kao

$$\mu(R_i, R_j) = \min(s_i, s_j),$$

gdje je s_i članstvo robota i u dominantnom njegovom klasteru. Nakon prilagodbe, relacija je ograničena na robote unutar istog **FCM klastera**, što znači da ivice postoje samo između robota koji pripadaju istom klasteru prema FCM.

```
import networkx as nx

G_consistent = nx.Graph()
for i in range(len(robots)):
    G_consistent.add_node(i, pos=robots[i])

# Dodajemo ivice samo unutar istog FCM klastera
for i in range(len(robots)):
    for j in range(i + 1, len(robots)):
        if cluster_membership[i] == cluster_membership[j]:
            cluster_idx = cluster_membership[i]
            mu = min(U[cluster_idx, i], U[cluster_idx, j])
            G_consistent.add_edge(i, j, weight=mu)
```

Prag τ filtrira ivice prema minimalnoj vrijednosti sličnosti. Analiza klastera prema različitim pragovima τ pokazuje koliko su strogo grupisani roboti sličnih performansi:

```
tau_values = [0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95]
for tau in tau_values:
    edges_tau = [(u, v) for u, v, d in G_consistent.edges(data=True)
                  if d['weight'] >= tau]
    G_tau = nx.Graph()
    G_tau.add_nodes_from(G_consistent.nodes(data=True))
    G_tau.add_edges_from(edges_tau)
    clusters_tau = list(nx.connected_components(G_tau))
    print(f'Za  $\tau = \{{\tau:.2f}\}$  formirano je  $\{{\text{len}}(\text{clusters\_tau})\}$  klastera')
```

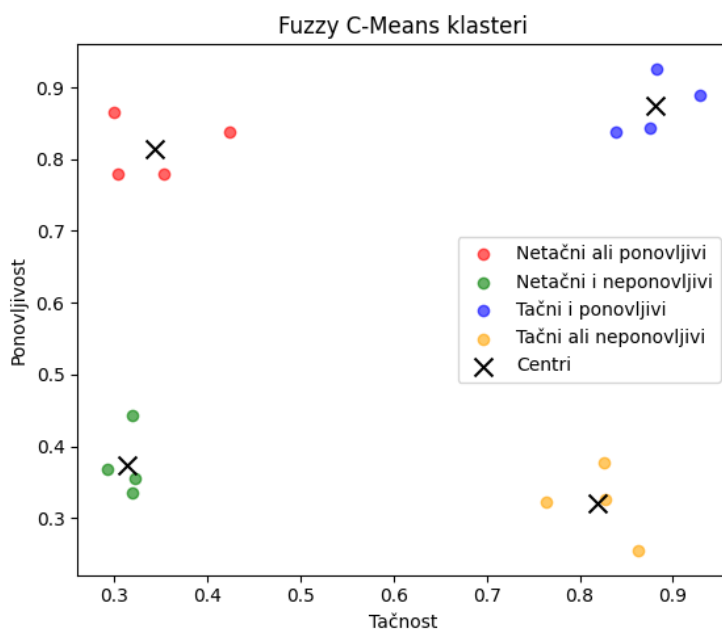
Analiza daje sljedeće rezultate:

- Za $\tau = 0.50$ formirano je 4 klastera
- Za $\tau = 0.60$ formirano je 4 klastera
- Za $\tau = 0.70$ formirano je 4 klastera
- Za $\tau = 0.80$ formirano je 4 klastera
- Za $\tau = 0.90$ formirano je 4 klastera
- Za $\tau = 0.95$ formirano je 6 klastera

Objašnjenje fragmentacije klastera pri visokom τ : Kada prag postane vrlo visok ($\tau = 0.95$), samo roboti s izuzetno visokom i ujednačenom sličnošću ostaju povezani. Roboti na "rubovima" FCM klastera, koji imaju nešto drugačije performanse od jezgre klastera, postaju izolirani. Ovo dovodi do fragmentacije i stvaranja više, manjih klastera u fuzzy grafu. Ovaj efekt pokazuje osjetljivost fuzzy grafa na stroge kriterije sličnosti i omogućava identifikaciju jezgrinih, visokokvalitetnih podgrupa unutar glavnih klastera [13, 24]. U praksi, niži pragovi ($\tau = 0.5 - 0.8$) daju robustniji, manje osjetljiv pregled glavnih grupa, dok viši pragovi ($\tau > 0.9$) omogućavaju finiju analizu unutrašnje strukture klastera [18, 12].

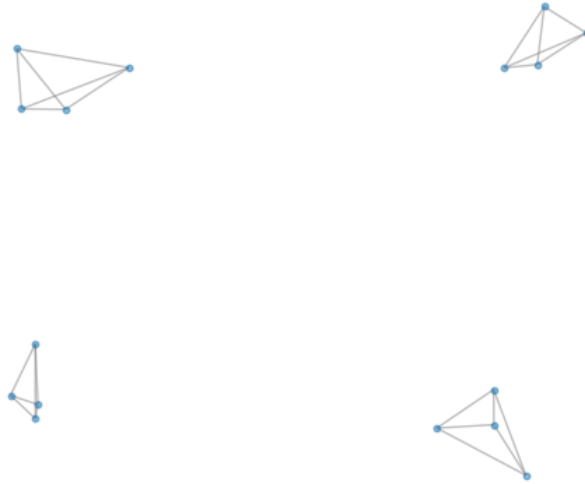
U radu su uključeni grafovi koji vizualno prikazuju rezultate:

1. **Fuzzy C-Means klasteri:** prikaz robota obojenih prema klasteru kojem najviše pripadaju i označeni centri klastera.
2. **Fuzzy graf:** prikaz svih veza između robota, gdje je težina ivice minimalna pripadnost dva robota klasteru.
3. **Klasteri prema pragu τ :** prikaz kako se formiraju klasteri kada se filtriraju veze s pripadnošću manjom od odabranog τ .



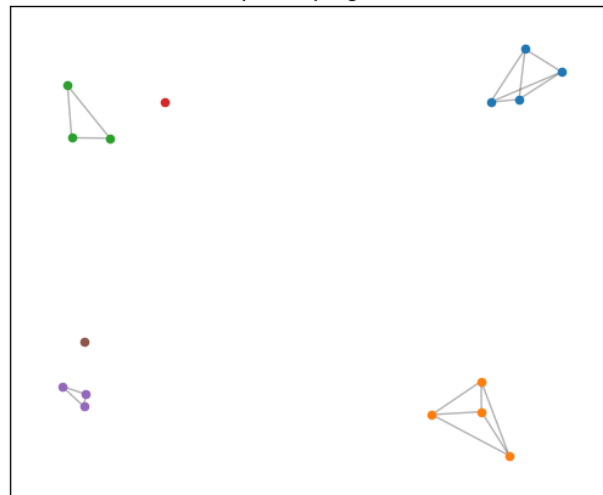
Slika2: Fuzzy C-Means klasteri robota. Roboti su obojeni prema klasteru kojem najviše pripadaju, a centri klastera su označeni.

Fuzzy graf unutar FCM klastera



Slika 3: Fuzzy graf s ivicama proporcionalnim minimalnom članstvu između robota.

Klasteri prema pragu $\tau = 0.95$



Slika 4: Klasteri robota prema pragu τ . Primjer za $\tau = 0.95$ koji pokazuje fragmentaciju originalnih klastera na manje, homogenije grupe.

Nakon provedenog FCM klasterovanja, izračunati su ključni statistički pokazatelji kako bi se kvantificirala kvaliteta klasterovanja. U Tabeli 2 prikazani su rezultati.

Prosječna maksimalna pripadnost klasteru iznosi 0.973 ± 0.019 , što ukazuje na vrlo visoku sigurnost pripadnosti robota njihovim dominantnim klasterima. Raspon vrijednosti od 0.926 do 0.999 potvrđuje da svi roboti imaju izrazito visoku pripadnost.

Prosječna pripadnost po pojedinačnom klasteru (računata samo za robote dodijeljene tom klasteru) kreće se od 0.960 do 0.981, s malim standardnim devijacijama (0.007 do 0.022). To pokazuje da su klasteri homogeni, odnosno da roboti unutar svakog klastera imaju vrlo slične

karakteristike. Klaster 3 ima najveći prosjek (0.981) i najmanju varijaciju (± 0.007), što ga čini najhomogenijom grupom.

Svi roboti (16/16, odnosno 100%) imaju pripadnost veću od 0.9 svom dominantnom klasteru, što dodatno potvrđuje kvalitetu FCM klasterovanja.

Primjenom visokog praga sličnosti $\tau = 0.95$ na fuzzy graf, kao što je prethodno objašnjeno, dolazi do fragmentacije originalnih klastera. Od 4 originalna klastera formira se 6 klastera, što ukazuje da unutar dva klastera postoje podgrupe robota s nešto nižom međusobnom sličnošću. Unatoč fragmentaciji, 14 od 16 robota (87.5%) ostaje grupirano s istim robotima kao i u originalnim klasterima. To znači da se fragmentacija događa samo na rubovima klastera, dok jezgrene grupe ostaju stabilne.

```
=====
STATISTIKA FUZZY PRIPADNOSTI PO KLASITERIMA
=====
1. Prosječna pripadnost DOMINANTNOM klasteru:
   0.973 ± 0.019
   Raspon: 0.926 - 0.999

2. Prosječna pripadnost po klasteru (samo roboti u klasteru):
   Klaster 1: 0.960 ± 0.021 (N=4)
   Klaster 2: 0.979 ± 0.022 (N=4)
   Klaster 3: 0.981 ± 0.007 (N=4)
   Klaster 4: 0.973 ± 0.016 (N=4)

3. Roboti sa pripadnošću >0.9:
   16/16 (100.0%)

4. Fragmentacija pri  $\tau=0.95$ :
   Pri  $\tau=0.95$ , 6 klastera (od originalnih 4)
   • 14/16 robota (87.5%)
     ostaje u istim grupama nakon fragmentacije
=====
```

Tabela2: Statistika fuzzy pripadnosti po klasterima.

5. ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazan je hibridni pristup analizi performansi robota pomoću Fuzzy C-Means (FCM) klasterovanja i fuzzy grafa [3, 16]. FCM omogućava grupisanje robota u klastere prema stepenu njihove pripadnosti, dok fuzzy graf prikazuje međusobne veze robota na osnovu njihove sličnosti u performansama. Kombinovanjem ove dvije metode dobije se jasnija slika o raspodjeli performansi i povezanosti robota, što može pomoći pri izboru robota za određene zadatke ili pri identifikaciji grupa sličnih performansi [20].

FCM pruža **makro-perspektivu** grupisanja robota u prostoru karakteristika, dok fuzzy graf nudi **mikro-perspektivu** analizirajući snagu i putanje povezanosti između pojedinačnih robota [18]. Rezultati pokazuju da je moguće jasno razlikovati grupe robota s različitim karakteristikama, te da pragovi u fuzzy grafu omogućavaju kontrolu strogoće grupisanja. Fragmentacija klastera pri visokim pragovima τ otkriva unutrašnju strukturu grupa i omogućava identifikaciju jezgrenih podgrupa [13, 24]. Ova pojava fragmentacije može biti posebno korisna u praktičnom kontekstu, na primjer za prioritizaciju održavanja ili alokaciju zadataka robotskim podgrupama sa specifičnim karakteristikama.

U odnosu na klasične statističke metode, poput k-means [6], FCM i fuzzy graf nude dodatnu informaciju o stepenu pripadnosti i međusobnim odnosima, što doprinosi potpunijem razumijevanju performansi robota [18]. Ovaj hibridni okvir omogućava finiju klasifikaciju performansi od determinističkih metoda, jer se oštre, unaprijed određene granice zamjenjuju kontinuiranim stepenom pripadnosti.

Iako predložena metodologija nudi vrijedan okvir za analizu performansi robota, važno je istaknuti njena ograničenja. Prije svega, interpretacija rezultata je u velikoj mjeri subjektivna – izbor fuzzy operatora (kao što je min za definiciju relacija) i pragova ne proizlazi neposredno iz podataka, već predstavlja odluke istraživača koje mogu varirati od slučaja do slučaja. Nadalje, korištenje simuliranih podataka, iako korisno za demonstriranje koncepta, ograničava direktnu primjenjivost na realne robotske sisteme, gdje performanse zavise od dinamičkih faktora okoline i složenih interakcija.

Stoga, dobiveni rezultati trebaju se tretirati kao kvalitativna indikacija mogućih obrazaca i polazište za daljnju, empirijski utemeljenu analizu, a ne kao konačna, objektivna kategorizacija. Buduća istraživanja bi trebala usmjeriti na provjeru metodologije na stvarnim podacima prikupljenim kroz praćenje performansi robota u stvarnim uslovima rada, te na razvoj postupaka za objektivniji odabir fuzzy parametara. Integracija ove analitičke metodologije sa sistemima za praćenje u realnom vremenu predstavlja obećavajući pravac za praktičnu primjenu u industriji i istraživanju robotike.

CONCLUSION

This paper presents a hybrid approach to robot performance analysis using Fuzzy C-Means (FCM) clustering and a fuzzy graph [3, 16]. FCM enables the grouping of robots into clusters according to their degrees of membership, while the fuzzy graph represents the mutual relationships between robots based on their similarity in performance. By combining these two methods, a clearer picture of the distribution of performance and the interconnections among robots is obtained, which can assist in selecting robots for specific tasks or in identifying groups with similar performance characteristics [20].

FCM provides a **macro-level perspective** by clustering robots in the feature space, whereas the fuzzy graph offers a **micro-level perspective** by analyzing the strength and paths of connectivity between individual robots [18]. The results show that it is possible to clearly distinguish groups of robots with different characteristics, and that thresholds in the fuzzy graph allow control over the strictness of clustering. Cluster fragmentation at high threshold values τ reveals the internal structure of groups and enables the identification of core subgroups [13, 24]. This fragmentation phenomenon can be particularly useful in practical contexts, for example, for maintenance prioritization or task allocation to robotic subgroups with specific characteristics.

Compared to classical statistical methods such as *k*-means [6], FCM and fuzzy graphs provide additional information on degrees of membership and mutual relationships, contributing to a more comprehensive understanding of robot performance [18]. This hybrid framework enables a finer classification of performance than deterministic methods, as sharp, predefined boundaries are replaced by continuous degrees of membership.

Although the proposed methodology offers a valuable framework for robot performance analysis, it is important to highlight its limitations. First, the interpretation of results is largely subjective—the choice of fuzzy operators (such as the use of the minimum to define relations)

and threshold values does not arise directly from the data, but rather reflects researcher decisions that may vary from case to case. Furthermore, the use of simulated data, while useful for demonstrating the concept, limits direct applicability to real robotic systems, where performance depends on dynamic environmental factors and complex interactions.

LITERATURA

- [1] M. Baczynski, B. Jayaram, *Fuzzy Implications*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [2] I. Benaicha, E. Nechadi, O. Boutalbi, N. Essounbouli, “An Improved Fuzzy Logic Controller for Mobile Robots Navigation in Unknown Environments,” *Journal of Field Robotics*, vol. 43, no. 1, pp. 257–278, 2025.
- [3] J. C. Bezdek, *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*, Plenum Press, New York, 1981.
- [4] P. Chotikunnan, K. Roongprasert, R. Chotikunnan, Y. Pititheeraphab, T. Puttasakul, A. Wongkamhang, N. Thongpance, “Hybrid Fuzzy-Expert System Control for Robotic Manipulator Applications,” *Journal of Robotics and Control (JRC)*, vol. 6, no. 1, pp. 155–165, 2025.
- [5] S. J. Chen, C. L. Hwang, *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer, 2000.
- [6] J. C. Dunn, “A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters,” *Journal of Cybernetics*, vol. 3, pp. 32–57, 1973.
- [7] M. Ester, H.-P. Kriegel, J. Sander, X. Xu, “A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise,” *Proceedings of the Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD-96)*, 1996, pp. 226–231.
- [8] P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Springer, 2013.
- [9] A. Hentout, A. Maoudj, M. Aouache, “A review of the literature on fuzzy-logic approaches for collision-free path planning of manipulator robots,” *Artificial Intelligence Review*, vol. 56, pp. 3369–3444, 2023.
- [10] A. R. Ismail, A. Hassan, S. Shamsuddin, M. Z. Nuawi, M. N. Ab Rahman, “The performance analysis of industrial robot under loaded conditions and various distance,” *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 2, no. 2, pp. 277–284, 2008.
- [11] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms*, Springer, 2013.
- [12] S. Mathew, M. S. Sunitha, “Types of arcs in a fuzzy graph,” *Information Sciences*, vol. 179, no. 11, pp. 1760–1768, 2009.
- [13] A. Nagoor Gani, D. Rajalaxmi, “Metric in Fuzzy Labeling Graph,” *International Journal of Fuzzy Mathematical Archive*, vol. 5, no. 2, pp. 113–122, 2014.
- [14] T. J. Ross, *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, John Wiley & Sons, 1995.
- [15] T. J. Ross, *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, 3rd edition, Wiley, 2010.

- [16] A. Rosenfeld, “Fuzzy graphs,” in *Fuzzy Sets and Their Applications*, L. A. Zadeh et al. (Eds.), Academic Press, New York, 1975, pp. 77–95.
- [17] S. Sahu, B. B. Choudhury, “Fuzzy Logic Based Path Planning for Industrial Robot,” *International Journal of Manufacturing, Materials, and Mechanical Engineering (IJMMME)*, vol. 8, no. 3, pp. 1-11, Jul. 2018.
- [18] K. Sameena, “Clustering Using Strong Arcs in Fuzzy Graphs,” *Gen. Math. Notes*, vol. 30, no. 1, pp. 60–68, 2015.
- [19] Y. Shi, *A Deep Study of Fuzzy Implications*, Ph.D. dissertation, Faculty of Science, Ghent University, Belgium, 2009.
- [20] A. Şirinterlikçi, O. Tiryakioğlu, R. Bird, N. Harris, R. Kweder, “Repeatability and Accuracy of an Industrial Robot,” *Technology Interface Journal*, vol. 10, no. 1, pp. 1–8, 2009.
- [21] M. I. Sözat, A. Yazıcı, “A complete axiomatization for fuzzy functional and multivalued dependencies in fuzzy database relations,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 117, no. 1, pp. 161–181, 2001.
- [22] S. Stavrinidis, P. Zacharia, E. Xidias, “A Fuzzy Control Strategy for Multi-Goal Autonomous Robot Navigation,” *Sensors*, vol. 25, no. 2, p. 446, 2025.
- [23] H. H. Tang, N. S. Ahmad, “Fuzzy logic approach for controlling uncertain and nonlinear systems: A comprehensive review of applications and advances,” *Systems Science & Control Engineering*, vol. 12, no. 1, 2024.
- [24] M. Tom, M. S. Sunitha, “Strong sum distance in fuzzy graphs,” *SpringerPlus*, vol. 4, p. 332, 2015.
- [25] L. X. Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control*, 2nd edition, Prentice Hall, 2006.
- [26] W. Xue, B. Zhou, F. Chen, H. Taghavifar, A. Mohammadzadeh, E. Ghaderpour, “A Constrained Fuzzy Control for Robotic Systems,” *IEEE Access*, vol. 12, pp. 3370-3382, 2024.
- [27] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets,” *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965.
- [28] H. J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, 4th ed., Springer, Dordrecht, 2011.