

Fatih Destović
Ismet Kalčo

NEKE PRIMJENE ZAKONA VELIKIH BROJEVA U ANALIZI

Sažetak

U radu su date neke primjene zakona velikih brojeva u klasičnoj matematičkoj analizi. Naime, postoji mnogo generalizacija, kao i primjena tog zakona. Pomenuto je nekoliko klasičnih rezultata i dati dokazi nekih primjena u analizi. Prvo je dat dokaz Weirstrass-ovog teorema koristeći zakon velikih brojeva, a zatim i još neke primjene kod višestrukih integrala, kao i kratak osvrt na Monte- Carlo metod.

Ključne riječi: Zakon velikih brojeva, slučajna promjenljiva, skoro sigurna konvergencija u vjerovatnoći, aproksimacija, raspodjela.

Summary

The paper gives some applications of the law of large numbers in the classical mathematical analysis. There are many generalizations and application of the law. Several classical results and give some evidence of applications in analysis. First, gives evidence Weirstrass theorem using the law of large numbers and then some applications of multiple integrals as well as a brief overview of the Monte Carlo method.

Key words: Law of large numbers, random variable, almost sure convergence, in probability distribution approximation.

UVOD

Pretpostavimo da izvodimo eksperiment u kome može da se dogodi događaj A. Ako smo u mogućnosti da isti eksperiment ponavljamo neograničeno mnogo puta pod istim uslovima, tada možemo da definišemo vjerovatnoću događaja A kao

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \quad (1)$$

gdje je S_n broj onih eksperimenata u kojima se dogodio događaj

A, od ukupnog broja od n izvedenih eksperimenata.

Iako navedena definicija nije pogodna za teorijsko zasnivanje vjerovatnoće, to je jedini način da se odredi nepoznata vjerovatnoća nekog događaja. Naime, izvodimo izvjestan broj eksperimenata (n),

izračunavamo $\frac{S_n}{n}$ i taj količnik nazivamo $P(A)$. Ovaj postupak nije bez osnove. Da nije tako, teorija vjerovatnoće bi ostala samo obična matematička konstrukcija. Empirijska činjenica je da limes u (1) uvijek postoji. Ova činjenica se naziva zakon velikih brojeva. "Ovaj zakon tvrdi da količnici brojeva, izvedeni iz posmatranja velikog broja sličnih događaja, ostaju praktično konstantni, pod uslovom da su ti događaji uslovljeni djelimično stalnim faktorima, a djelimično varijabilnim faktorima, čije su promjene nepravilne i ne prouzrokuju sistematsko odstupanje u određenom pravcu." (PARZEN, MISES).

PRIMJENE ZAKONA VELIKIH BROJEVA

U teoriji vjerovatnoće relacija (1) mora da bude izvedena i limes se uzima u nekom određenom smislu (S_n je slučajna varijabla). Ako je u (1) konvergencija u vjerovatnoći, tada se (1) naziva slabi zakon velikih brojeva.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{S_n}{n} - P(A) \right| \geq \varepsilon \right) = 0 \quad (\text{za svako } \varepsilon > 0) \quad (2)$$

Ako je konvergencija odgovarajuće tvrđenje, naziva se jaki (ili strogi) zakon velikih brojeva.

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n}{n} \right) \right) = P(A) = 1 \quad (3)$$

Postoji mnogo generalizacija i varijacija relacije (1) i sve su poznate pod imenom zakona velikih brojeva. Navest ćemo samo nekoliko klasičnih rezultata:

1. Neka je S_n broj pojavljivanja događaja A u n nezavisnih opita.

Ako je $p = P(A)$, tada za svako $\varepsilon > 0$, vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad (\text{Bernoulli-jev zakon velikih brojeva})$$

2. Neka su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne promjenljive sa istom raspodjelom. Sljedeća dva iskaza su ekvivalentna:

- a) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow c$ (s.s.) za $|c| < +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$)
 b) $E|X_1| < +\infty$ i $c = E(X_1)$ (Zakon velikih brojeva Kolmogorova)

3. Neka su $X_1, \dots, X_n, \dots$ nezavisne slučajne varijable sa $E(X_i) = 0$ za svako i , i neka je $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$. Tada za svako $\varepsilon > 0$, je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| \geq \varepsilon) = 0, \text{ ako i samo ako kad } n \rightarrow \infty \text{ vrijedi}$$

$$(i) \sum_{k=1}^n P(|X_k| \geq n) \rightarrow 0,$$

$$(ii) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k \cdot I_{\{|X_k| < n\}}) \rightarrow 0$$

$$(iii) \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k \cdot I_{\{|X_k| < n\}}) \rightarrow 0$$

4. Neka su $X_1, \dots, X_n, \dots$ nezavisne slučajne varijable, $E(X_k) = 0$ za svako k . Ako za neko $\delta > 0$ imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-(1+\delta)} \sum_{k=1}^n E|X_k|^{1+\delta} = 0,$$

Tada $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow 0$ u vjerovatnoći (zakon velikih brojeva Markova).

Sada ćemo dokazati Weierstrass-ov teorem koristeći zakon velikih brojeva.

Teorem 1. Neka je $X_1, \dots, X_n, \dots$ niz nezavisnih slučajnih varijabli

sa istom raspodjelom, $E(X_1) = X$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Ako $\frac{S_n}{n} \rightarrow x$ u smislu strogog ili slabog zakona velikih brojeva tada za svaku ograničenu i neprekidnu realnu funkciju f vrijedi

$$Ef\left(\frac{S_n}{n}\right) \rightarrow f(x) \quad (1)$$

Dokaz: Dovoljno je da dokažemo (1) pod pretpostavkom da važi slabi zakon velikih brojeva. Pretpostavimo, da za svako $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - X\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Neka je $A_n = \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \varepsilon \right\}$ i neka je $|f(x)| \leq M$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Tada imamo

$$\begin{aligned} \left| Ef\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| &= \left| E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)I_{A_n} + E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)I_{A_n^c} \right| \leq \\ &= E\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|I_{A_n} + E\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|I_{A_n^c} \leq \\ &= I_{A_n}C \leq \varepsilon + 2M \cdot P(A_n^c) \leq \varepsilon + 2M \cdot \text{Var}(X_p) / n^2 \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Pri čemu smo u posljednjem koraku iskoristili Čebiševljevu nejednakost.

Primijetimo da, ako su X_i Bernoulli-jeve slučajne promjenljive, tj. $P(X_1=1)=x$, $P(X_1=0)=1-x$,

tada je $P(A_n^c) \leq x(1-x)/n\varepsilon^2 < 1/n\varepsilon^2$, tako da je konvergencija uniformna po x . U tom slučaju S_n je binomna slučajna promjenjiva i (1) implicira da, za svaku neprekidnu realnu funkciju na $[0,1]$,

imamo:

$$E f\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2)$$

uniformno po x . Srednji član u (2) je tzv. Bernstein-ov polinom. Prema tome, svaka neprekidna realna funkcija može da se na $[0,1]$ uniformno aproksimira polinomima. Dakle, skup polinoma je svuda gust u prostoru $C[0,1]$.

Teorem 2. Nekasu f , g i φ date realne i integrabilne funkcije na $(0,1)$ koje zadovoljavaju sljedeće uslove:

- i) $\int_0^1 \varphi(x) dx = 1$, $\varphi(x) > 0$;
 - ii) $0 < f < c \cdot g$, za neko $c < \infty$ i $\int_0^1 g(x) \varphi(x) dx < \infty$, ili
 - ii') $\int_0^1 |f(x)| \varphi(x) dx < \infty$, $\int_0^1 g(x) \varphi(x) dx < \infty$ i
- $$\int_0^1 \frac{|f(x)|^r}{g^r(x)} \varphi(x) dx < \infty.$$

Tada vrijedi:

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^n f(X_i)}{\sum_{i=1}^n g(X_i)} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) dx_1, dx_2, \dots, dx_n \rightarrow \frac{\int_0^1 f(x) \varphi(x) dx}{\int_0^1 g(x) \varphi(x) dx} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1)$$

Dokaz: Neka je $\Omega(0,1)$, neka je $\mathcal{B}$ Borelovo sigma polje podskupova Ω i neka je P vjerovatnoća na $(\Omega, \mathcal{B})$ definisana pomoću $P(A) = \int \varphi(x) dx$, za A iz $\mathcal{B}$. Uobičajena procedura za dobijanje niza nezavisnih slučajnih promjenljivih sa istom raspodjelom je da se konstruiše beskonačan proizvod $(\Omega^\infty, \mathcal{F}, P)$ identičnih kopija prostora $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Tada slučajne promjenljive $X_i(\omega) = X(x_1, x_2, \dots) = x_i$ imaju istu raspodjelu vjerovatnoće P i nezavisne su. Na osnovu zakona velikih brojeva Kolmogorova imamo:

$$\frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{\sum_{g=1}^n g(x_i)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)} \rightarrow \frac{Ef(x_1)}{Eg(x_1)} = \frac{\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx}{\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx} \quad (2)$$

I u drugim oblastima matematike mogu se naći zanimljive primjene zakona velikih brojeva. Jedan od tih zanimljivih primjena je Monte-Carlo integracija:

Neka je f realna funkcija definisana i integrabilnana $(0,1)$. Neka je B Borel-ovo σ polje na $(0,1)$ i neka je P Lebesgue-ova mjera. Tada je f

slučajna promjenljiva na $((0,1), B, P)$ i, $E(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

Neka je $(\Omega, F, P) = ((0,1), B, P)^\infty$. Za $\omega = (X_1, X_2, \dots) \in \Omega$ neka je $X_i(\omega) = f(x_i)$. Tada su X_i ($i=1,2,\dots$) nezavisne slučajne varijable sa istom raspodjelom f . Primijetimo da su $Y_i(\omega) = Y_i(x_1, x_2, \dots) = x_i$, nezavisne slučajne varijable sa uniformnom raspodjelom na $(0,1)$.

Prema zakonu velikih brojeva kada $(n \rightarrow \infty)$ vrijedi:

$$\frac{(X_1) + \dots + f(X_n)}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow Ef = \int_0^1 f(x)dx \quad (1)$$

Relacija (1) vrijedi za skoro sve $\omega (x_1, x_2, \dots)$ u odnosu na mjeru P .

Ovo nam daje ideju za Monte-Carlo integraciju. Izaberu se tačke $x_1, \dots, x_n$ na slučajan način u intervalu $(0,1)$. Na slučajan način znači, da su $x_1, x_2, \dots, x_n$ nezavisne slučajne promjenljive sa uniformnom raspodjelom na $(0,1)$. Tada, prema (1) aritmetička sredina brojeva

$f(x_1), \dots, f(x_n)$ konvergira ka integralu $\int_0^1 f(x) dx$ kada $n \rightarrow \infty$.

Literatura

1. L.C. MALLOWS, *An Ineqly involving multinomial probabilities*, bionetrika 55,2 PP. 422-424 (1986.)
2. R.PICK, *Expectation in metric spaces*, studia math. Hungarica 22 (1987) 347-350.
3. I. GALAMBOS, A. RENY: *On quaratic inequalities in the theory of probabilities*, studia SCI math. Hungarica, T. III (1968)
4. P. ERDOS, I. NEVEU , A. RENYI, *An elementary inequality beetwen the probabilities of events*, math. Scand 13 (1983.)
5. K. MULLEN: *A note on the ratio of two independerit random variables*, The American Statisticion, Vol. 21 No3 (1997.)
6. G. PISIER, J. ZINN: *Modern probability theory and its Applications* (1960.)