Dževad Burgić

ANALIZA STRUKTURE INTEGRALNIH KRIVIH NELINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Sažetak

Skoro sve pojave u prirodi, odnosno u tehnici i fizici mogu biti opisane pomoću diferencijalnih jednadžbi ili sistema diferencijalnih jednadžbi. Matematički modeli tih pojava su u prošlosti bili idealizovani iz razloga da se dobije diferencijalna jednadžba ili sistem diferencijalnih jednadžbi rješiv u zatvorenom obliku. Danas razmatramo pojave koje se najčešće opisuju nelinearnim diferencijalnim jednadžbama, tj. jednadžbama koje najčešće nisu rješive u zatvorenom obliku. Zbog toga je od posebnog interesa da se okarakteriziraju svojstva rješenja nelinearnih diferencijalnih jednadžbi i sistema diferencijalnih jednaždbi, kao i numeričke metode koje omogućavaju aproksimaciju tih rješenja. U ovom radu je data analiza rješenja nelinearnih diferencijalnih jednadžbi ili sistema jednadžbi na osnovu strukture njenih integralnih krivih.

Ključne riječi: *Trajektorija, fazna ravan, dinamički sistem, stabilnost, granični cikl.*

THE ANALYSIS OF STRUCTURE OF AN INTEGRATE CURVES NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

Almost all phenomena in nature and in engineering and physics can be described by differential equations or systems of differential equations. Mathematical models of these phenomena have been idealized in the past due to get a differential equation or system of differential equations solvable in closed form. Today we consider the phenomena which are typically nonlinear differential equations, the equations which are usually not solvable in closed form. It is therefore of particular interest to characterize properties of solutions of nonlinear differential equations and systems of differential equations and numerical methods that allow an approximation of these solutions. In this paper was given an analysis of solutions of nonlinear differential equations or systems of equations based on the structure of its integral curves.

Key words*: trajectory, phase plane, dynamical system, stability, boundary cycle.*

UVOD

Skoro sve pojave u prirodi mogu se opisati diferencijalnim jednadžbama ili sistemima diferencijalnih jednadžbi. Matematički modeli u prošlosti su bili idealizovani u smislu da se dobije diferencijalna jednadžba ili sistem diferencijalnih jednadžbi koji je rješiv u zatvorenom obliku. Danas se razmatraju pojave koje se opisuju nelinearnim diferencijalnim jednadžbama, tj. jednadžbama koje nisu rješive u zatvorenom obliku. U tom slučaju je od posebnog značaja da se okarakteriziraju osobine rješenja nelinearnih diferencijalnih jednadžbi kao i numeričke metode koje omogućavaju aproksimaciju tih rješenja.

Prije same primjene neke numeričke metode treba prethodno provjeriti da li je dati problem „pravilno formulisan", tj. da li smo pomoću matematičkog modela pravilno i potpuno opisali posmatranu pojavu.

Za problem zadan običnim diferencijalnim jednadžbama ili parcijalnim diferencijalnim jednadžbama kažemo da je „korektno" postavljen, tj. formulisan, u klasi funcija *F,* ako su zadovoljena sljedeća tri uslova:

1^0 Postoji rješenje u klasi *F*, tzv. problem „*egzistencije* „ rješenja;
2^0 Rješenje je jedinstveno u klasi *F*, tzv. problem „*jedinstvenosti*" rješenja;
3^0 Rješenje neprekidno zavisi od datih uslova-podataka (od početnih uslova, rubnih uslova, itd.), tzv. problem „*stabilnosti*" rješenja.

Korektnost postavljenog problema je naročito važna za njegovu primjenu, jer postavljeni problem opisuje neku fizičku pojavu. Uslovom 3^0 se obezbjeđuje da rješenje problema ne zavisi bitno od grešaka koje se uvijek javljaju prilikom mjerenja (dopunski uslovi i parametri) posmatrane fizičke pojave. Ako rješenje problema nije neprekidna funkcija tih parametara, ne bismo mogli opisati proces (pojavu) pomoću matematičkog modela, jer bi mala promjena (greška) u mjerenju dovela do velikih promjena u rješenju.

Kod običnih diferencijalnih jednadžbi, kao što je poznato, uslov za korektnost Cauchy-evog problema:

$$y' = f(x, y);\ y(x_0) = y_0$$

obezbjeđuje se ako je f neprekidna funkcija i ako f zadovoljava Lipschitz-ov uslov s obzirom na promjenljivu y u nekoj oblasti koja sadrži tačku $(x_0; y_0)$.

Primjena numeričkih metoda uzrokuje i nekoliko teorijskih problema, kao što su:

- *brzina konvergencije*,
- *nagomilavanje grešaka*, i
- *numerička stabilnost rješenja*.

Primjenom numeričkih metoda na DJ (diferencijalne jednadžbe) ili sistem DJ fizički sistem se može opisati sa dovoljnom tačnošću, odnosno mogu se pokazati najvažnije osobine rješenja. U tom slučaju, jednadžbu:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{1}$$

posmatramo kao jednadžbu koja opisuje taj fizički sistem. Shodno tome, za t kažemo da je vremenska promjenljiva a $\mathbf{x}$ fazna, odnosno prostorna promjenljiva. Broj koordinata $\mathbf{x}$ određuje broj stepena slobode sistema (1). Rješenja sistema DJ (1) karakterišu moguća kretanja sistema u faznom prostoru-vremenu. Budući da se vrijeme može izraziti kao parametar, moguće je rješenje (kretanje) opisati u faznom prostoru.

Sistem jednadžbi oblika:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2}$$

nazivamo *dinamičkim* ili *autonomnim* kada $\mathbf{f}$ ne zavisi od t. U tom slučaju kretanje, pa prema tome i rješenje sistema (1) ne zavisi od t.

OSOBINE AUTONOMNIH SISTEMA

U fizičkom smislu dinamički sistem (2) je matematički model kretanja materijalne tačke u n -dimenzionalnom prostoru

promjenljivih $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ovo kretanje je opisano rješenjem

$$x_i = x_i(t), \quad t \in I, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

dinamičkog sistema. Budući da je trajektorija kriva koja opisuje proces kretanja, onda slijedi da su $x_i = x_i(t)$ parametarske jednadžbe trajektorije.

Integralna kriva rješenja $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \ t \in I$ daje potpunu informaciju o rješenju sistema (2). Međutim neke važne informacije se mogu dobiti na osnovu fazne trajektorije rješenja, tj. projekcije rješenja integralne krive na fazni prostor $\mathbf{R}^n$, paralelno *t*-osi. Zbog toga je fazna trajektorija potpuno određena integralnom krivom, dok obrnuto nije tačno, jer različite integralne krive mogu imati istu trajektoriju. Fazni prostor je prostor u kome je rješenje predstavljeno trajektorijama.

Pri opisivanju fazne trajektorije mora se imati u vidu pravac fazne trajektorije, tj. pravac kretanja materijalne tačke $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ po faznoj trajektoriji, u pravcu porasta vremenske promjenljive *t*. Grafik faznih trajektorija u faznoj ravni se naziva fazni portret.

Dalje, pretpostavljamo da u sistemu (2) funkcija $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ zadovoljava Lipschitz-ov uslov s eksponetom 1 u donosu na sve prostorne promjenljive. Tada slijedi da kroz svaku tačku (x_0, t_0) prolazi jedna i samo jedna integralna kriva. Zato nećemo predstavljati integralne krive, već njima odgovarajuće trajektorije.

Definicija 1. *Tačka* $\mathbf{x}_0 \in D$*, za koju vrijedi da je* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ *naziva se regularnom tačkom dinamičkog sistema (2).*

Kroz svaku regularnu tačku u faznom prostoru prolazi tačno jedna kriva. Ako je $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$, onda se tačka $\mathbf{x}_0 \in D$ naziva *singularnom tačkom* ili *kritičnom tačkom* dinamičkog sistema (2), jer

se različite fazne trajektorije približavaju toj tački po različitim pravcima.

Ako parametarski zadamo tačke na trajektoriji pomoću nezavisno promjenljive t, onda se dio trajektorije sa tačkama kojima odgovara veća vrijednost parametra od $\mathbf{x}_0$ naziva *pozitivnom polutrajektorijom.*

Ukoliko je sistem autonoman onda podjela trajektorije ne zavisi od izbora parametra.

Iz sistema (2) slijedi da ako je tačka $\mathbf{x}_0$ *ekvilibrijum* (položaj ravnoteže), tada sistem (2) ima rješenje $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, a odgovarajuća fazna trajektorija je upravo tačka $\mathbf{x}_0$ u faznom prostoru $\mathbf{R}^n$.

Ako su $f_i,\ i = 1,2,\ldots,n$ neprekidno diferencijabilne funkcije, tada vrijede sljedeće izjave:

a) *Svaka fazna trajektorija dinamičkog sistema (2), različita od položaja ravnoteže, je glatka kriva.*

b) *Ako* $\mathbf{x} = \varphi(t)$ *rješenje dinamičkog sistema (2), tada je i funkcija* $\mathbf{x} = \varphi^*(t)$, *gdje je* $\varphi^*(t) = \varphi(t + c)$, c = *const. rješenje sistema (2).*

c) *Neka su* $\mathbf{x} = \varphi(t)$ *i* $\mathbf{x} = \psi(t)$ *rješenja sistema (2) i neka postoje* $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ *za koje je* $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$, *tada je i* $\varphi(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$, $t \in \mathbf{R}$.

d) *Ako je* $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_0, t)$ *rješenje dinamičkog sistema (2) koje zadovoljava početni uslov* $\varphi(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_0$, *tada je*

$$\varphi(\mathbf{x}_0, t_1 + t_2) = \varphi(\varphi(\mathbf{x}_0, t_1), t_2) = \varphi(\varphi(\mathbf{x}_0, t_2), t_1).$$

Ako se posmatra kretanje tačke po faznoj trajektoriji rješenja $\mathbf{x} = \varphi(t)$, onda je osobinom b) izražena činjenica da i rješenju $\mathbf{x} = \varphi^*(t)$ odgovara ista trajektorija, samo se kretanje tačke odvija sa kašnjenjem c.

Iz c) slijedi važan zaključak: *Ili se fazne trajektorije rješenja dinamičkog sistema (2) ne sijeku ni u jednoj tački, ili se poklapaju.*

Na osnovu d) slijedi da tačka pri kretanju po faznoj trajektoriji rješenja $\mathbf{x} = \varphi(t)$, iz početnog položaja $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_0, t)$ može doći za vrijeme $t_1 + t_2$ u položaj $\varphi(\mathbf{x}_0, t_1 + t_2)$ na dva načina:

- za vrijeme t_1 tačka pređe u položaj $\varphi(\mathbf{x}_0, t_1)$, a zatim za vrijeme t_2 iz tog položaja pređe u tačku $\varphi(\varphi(\mathbf{x}_0, t_1), t_2)$;
- za vrijeme t_2 tačka pređe u položaj $\varphi(\mathbf{x}_0, t_2)$, a zatim iz tog položaja za vrijeme t_1 pređe u tačku $\varphi(\varphi(\mathbf{x}_0, t_2), t_1)$.

Fazna trajektorija dinamičkog sistema (2) može biti:

a) *Tačka (ekvilibrijum),*
b) *Glatka kriva bez samopresjeka, kojoj odgovara neperiodično rješenje,*
c) *Zatvorena glatka kriva, kojoj odgovara periodično rješenje sa minimalnim (pozitivnim) periodom.*

Dakle, fazna trajektorija, koja nije tačka, otvorena je ili zatvorena glatka kriva bez samopresjeka. Ako je fazna trajektorija zatvorena kriva, rješenje dinamičkog sistema je periodična funkcija sa minimalnim periodom. To znači da realni sistem, matematički modeliran dinamičkim sistemom (2), radi u stabilnom režimu.

Ukoliko je dinamički sistem (2) složen, treba ga adekvatnom smjenom promjenljivih transformisati na jednostavniji ekvivalentni sistem. U tom slučaju fazne trajektorije jednog sistema se jednoznačno preslikavaju u fazne trajektorije drugog sistema, pri čemu se zadržava njihova topološka struktura.

OSOBINE SINGULARNIH TAČAKA I GRANIČNOG CIKLA

U faznom prostoru postoje dva tipa trajektorija. Trajektorije koje sadrže ili samo singularne tačke ili samo regularne tačke. Označimo sa ***v*** singularnu tačku sistema (2). Tada vrijedi sljedeća teorema.

Teorema 1. *Trajektorija ili nema nijednu graničnu tačku ili je granična tačka polutrajektorije singularna tačka sistema (2).*

Tačku ekvilibrijuma **v** dinamičkog sistema (2) nazivamo asimptotski stabilnom singularnom tačkom pozitivne polutrajektorije, ako se može naći (odrediti) otvorena okolina *U* oko $\mathbf{v}\left(\mathbf{v} \in U\right)$ za koju relacija

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}\left(t, \mathbf{x}_0, t_0\right) = \mathbf{v}$$

uvijek vrijedi, kada je $\mathbf{x}_0 \in U$.

Ako bi sve negativne polutrajektorije izlazile iz odgovarajuće singularne tačke, a pozitivne polutrajektorije imale singularnu tačku ili beskonačnost kao graničnu tačku, onda bi proučavanjem singularnih tačaka bilo lahko odrediti strukturu trajektorija, a time i prirodu rješenja dinamičkog sistema (2). Međutim, često se dešava da polutrajektorije postoje i ostaju u ograničenoj oblasti ali nemaju graničnu tačku. Zbog toga se uvodi pojam graničnog cikla ili zatvorene orbite.

Definicija 2. *Granični cikl dinamičkog sistema (2) je zatvorena fazna trajektorija G tog sistema za koju postoji okolina sa faznim trajektorijama po kojima se fazne tačke neograničeno približavaju krivoj G kada* $t \to \infty$ *ili* $t \to -\infty$.

Razmotrimo jednu pozitivnu polutrajektoriju $K : \mathbf{x}\left(t, \mathbf{x}_0, t_0\right)$. Kažemo da tačka $P = P\left(z\right)$ pripada skupu tačaka cikla *K*, ako se za svako $\varepsilon > 0$ i $T > t_0$ može naći takvo $\tau > T$ da je

$$\left|z - \mathbf{x}\left(\tau, \mathbf{x}_0, t_0\right)\right| < \varepsilon \, .$$

Skup tačaka graničnog cikla *K* označićemo sa *G(K)*. Formulisat ćemo neke osobine skupa tačaka graničnog cikla:

- *Skup G(K) je zatvoren,*

- *Tačke skupa G(K) su povezane.*

Teorema 2. *Ako P = P (z) nije singularna tačka sistema (2) i ako* $P \in G(K)$*, onda sve tačke pozitivne polutrajektorije koje prolaze tačkom P pripadaju skupu G(K).*

Dokaz. Ako polutrajektoriju koja prolazi tačkom *P* označimo sa *T* i ako pretpostavimo da je $Q = Q(\mathbf{q}) \in T$, tj.

$$\mathbf{q} = \mathbf{x}(t_Q, z, t_0), \text{ za } t_Q > t_P.$$

Tada za svako $\varepsilon_0 > 0$ možemo naći $\delta = \delta(\varepsilon_0, t_Q - t_P)$ takvo da vrijedi

$$\left|\mathbf{x}(t_0 + t_Q - t_P, \mathbf{w}, t_0) - \mathbf{q}\right| < \varepsilon \tag{3}$$

ako je $|\mathbf{w} - \mathbf{z}| < \varepsilon$. Neka sada $P \in G(K)$, onda za svako $T > t_P$ možemo naći takvo $\tau > T$, da vrijedi

$$\left|\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{z}\right| < \varepsilon .$$

Ali tada na osnovu (3) imamo da je

$$\left|\mathbf{x}(\tau + t_Q - t_P, \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{q}\right| < \varepsilon_0$$

ako je $\tau + t_Q - t_P > T$, pa slijedi da i $Q \in G(K)$.

AUTONOMNI SISTEMI SA DVA STEPENA SLOBODE

Budući da se realna predstava o faznom prostoru može dobiti za $n = 2$ (ili eventualno za $n = 3$), to se najčešće razmatraju dinamički sistemi oblika

$$x' = f(x, y); \;\; y' = g(x, y). \tag{4}$$

U tom slučaju fazni prostor se naziva fazna ravan. Tip i

pravac trajektorija dinamičkog sistema (4), uz neka ograničenja za funkcije *f* i *g* mogu se dobiti linearizacijom sistema (4). Zbog toga je važno prethodno razmotriti fazni portret linearnog sistema DJ sa konstantnim koeficijentima

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

gdje pretpostavljamo da je $ad - bc \neq 0$, što nam omogućava da sistem (5) ima jednu singularnu tačku $(0,0)$. Tačka $(0,0)$ je u ovom slučaju i ekvilibrijum, tj. izolovana singularna tačka. Pored ekvilibrijuma, u faznoj ravni R^2 dobijamo još šest različitih šema.

Prvo pretpostavimo da je $b = c = 0$. Tada je sigurno $a \neq 0$ i $d \neq 0$, zbog $ad - bc \neq 0$. Za proizvoljnu početnu tačku $x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0$ iz relacije

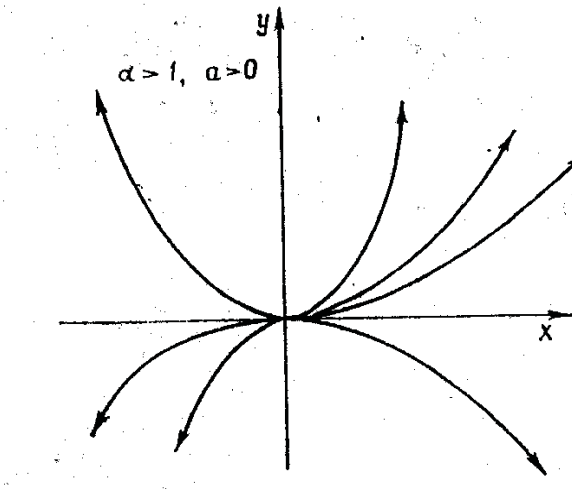
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{a} \cdot \frac{y}{x} = \alpha \cdot \frac{y}{x}$$

dobijamo da su integralne krive oblika: $y = c \cdot |x|^{\alpha}$.

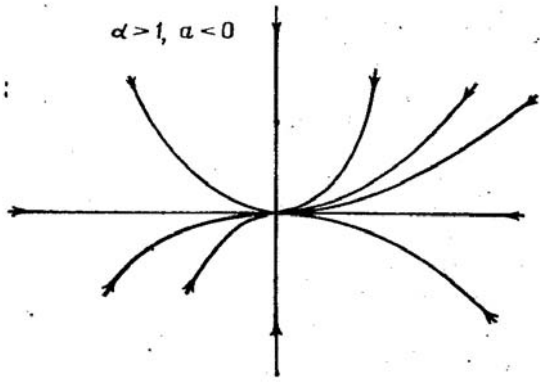
Za proizvoljnu početnu tačku $x_0 \neq 0,\ y_0 = 0$ ili $x_0 = 0,\ y_0 \neq 0$, rješenje je: $y_0 = 0$ ili $x_0 = 0$.

a) Ako je $0 < \alpha < 1$, dobijamo *čvor*. Ukoliko je $a < 0$ $(\text{tj. } d < 0, \text{ jer je } \alpha > 0)$, čvor je stabilan, a ako je $a > 0$ i $d > 0$ čvor je nestabilan (vidjeti slike 1, 2, 3 i 4).

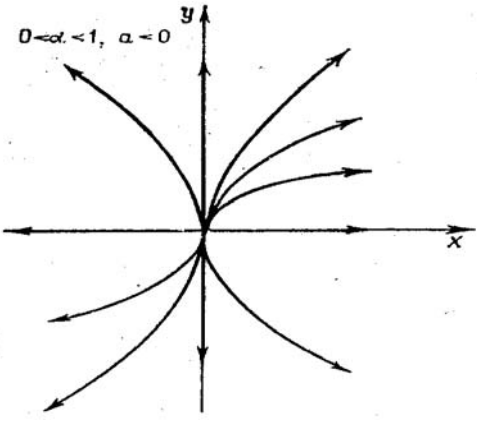
Strukturno čvor se karakteriše činjenicom da sve intergralne krive, sa izuzetkom samo jedne, ulaze i izlaze iz čvora sa jednom te istom tangentom.



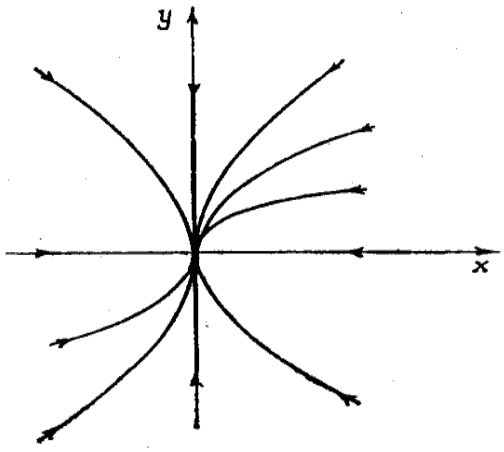
Slika 1.



Slika 2.

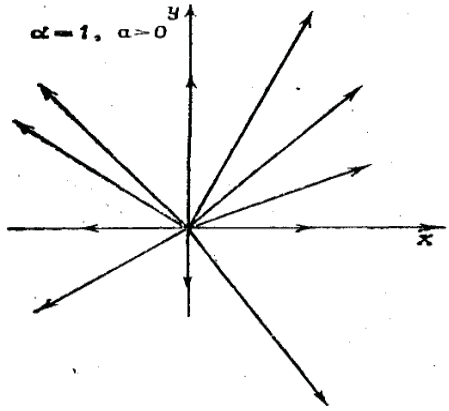


Slika 3.

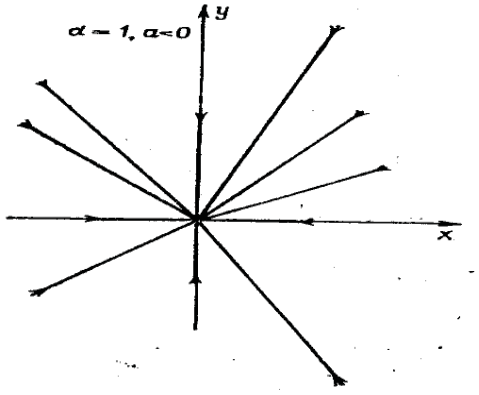


Slika 4.

b) Ako je $\alpha = 1$ dobijmo zvijezdu (Slike 5 i 6)

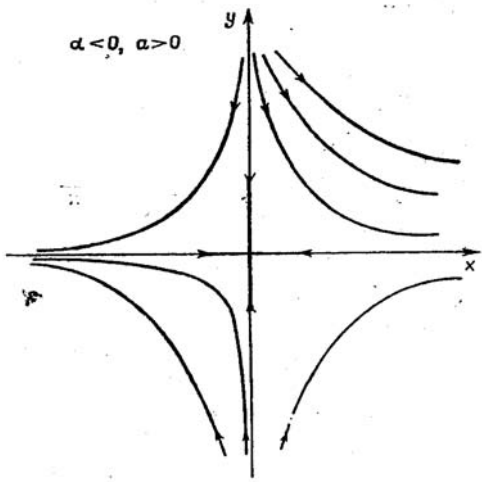


Slika 5.

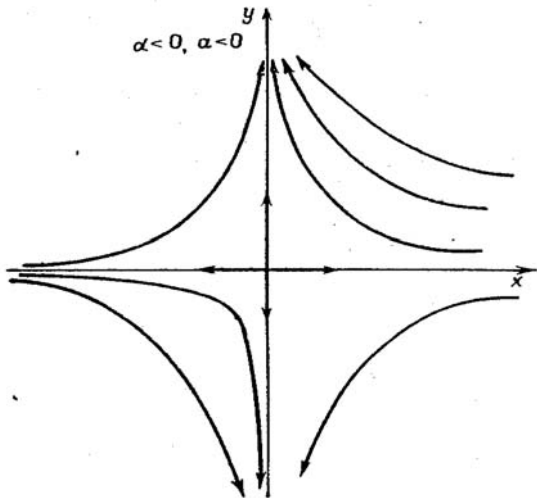


Slika 6.

c) Ako je $\alpha < 0$ dobijamo sedlo koje je uvijek nestabilno (Slike 7 i 8)



Slika 7.



Slika 8.

Razmotrimo sada slučaj $a = d = \alpha,\ b = 1,\ c = -1$. Ako uvedemo polarne koordinate, dobijamo

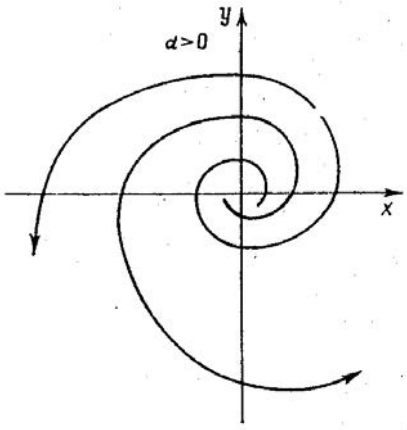
$$\rho' = \frac{1}{2\rho}\left(xx' + yy'\right) = \frac{xx' + yy'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \alpha\sqrt{x^2 + y^2} = \alpha\rho,$$

$$\varphi' = \frac{x^2}{x^2 + y^2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x'y}{x^2}\right) = -1.$$

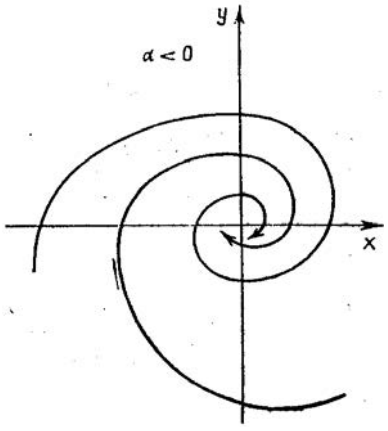
d) Ako je $\alpha \neq 0$ dobijamo fokus. Tada su intergralne krive date sa

$$\rho = Ce^{\alpha t};\ \varphi = \varphi_0 - t\,.$$

Dakle, fokus je stabilan za $\alpha < 0$ i nestabilan ako je $\alpha > 0$ (Slike 9 i 10)

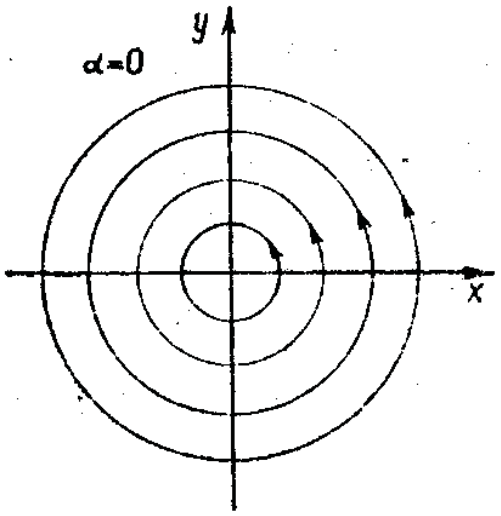


Slika 9.



Slika 10.

e) Ako je $\alpha = 0$ dobijamo centar (Slika 11).

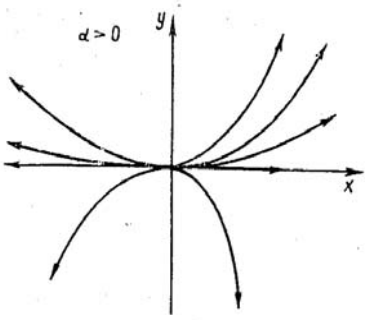


Slika 11.

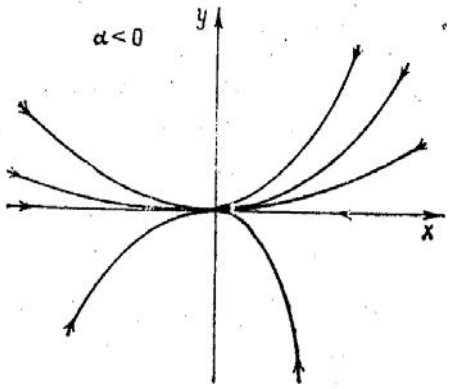
f) Konačno, razmotrimo slučaj kada je $a = d = \alpha \neq 0,\ b = 1$ i $c = 0$ Tada su rješenja oblika

$$y = Ce^{\alpha t};\ x = \left(C_1 + Ct\right)e^{\alpha t} = \left(C_1 + Ct\right)y\,.$$

Znači, ako je $\alpha < 0$ singularna tačka je stabilna, a ako je $\alpha > 0$ je nestabilna. U prvom slučaju integralne krive ulaze u singularnu tačku kada $t \to \infty$. Za singularnu tačku kažemo da je degenerisani čvor (Slike 12 i 13).



Slika 12.



Slika 13.

Dinamički sistem (4) se može svesti na jedan od šest gornjih slučajeva adekvatnom linearnom transformacijom. Odnosno, sistem (5) možemo napisati i u matričnom obliku

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x};\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{6}$$

tj. u obliku (6) linearnog sistema sa konstantnim koeficijentima. Tada fazni portret zavisi od svojstvenih vrijednosti matrice *A*; tj. od korijena karakteristične jednadžbe $\det(A - \lambda I) = 0$, pa su mogući sljedeći slučajevi:

1. Sopstvene vrijednosti su realne i različite.

- Ako je $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ onda sopstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2 matrice *A* odgovaraju dva linearno nezavisna vektora v_1 i v_2, pa opšte rješenje sistema (6) ima oblik

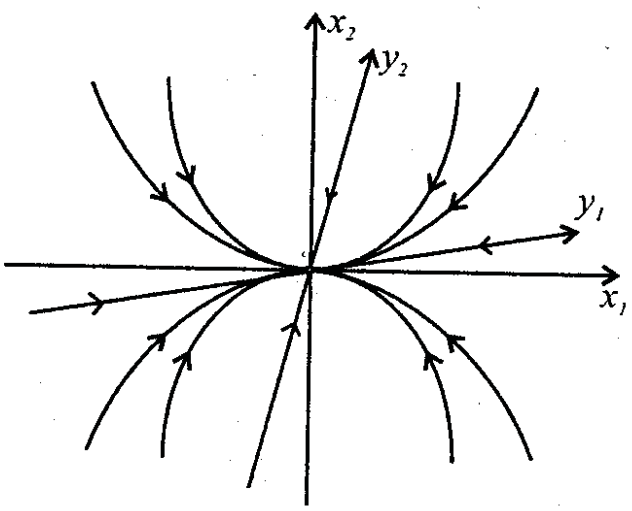
$$\mathbf{x} = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Ako sa (y_1, y_2) označimo koordinate vektora ***x*** u bazi koju formiraju vektori v_1 i v_2 (afinoj bazi koja u opštem slučaju nije ortogonalna), parametarske jednadžbe faznih trajektorija su

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t},\ y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{7}$$

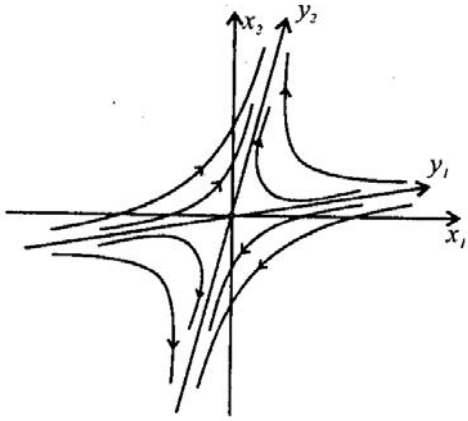
Dovoljno je razmotrati samo ponašanje u prvom kvadrantu, za $C_1 \geq 0$ i $C_2 \geq 0$, jer se trajektorije simetrično preslikavaju na ostala tri kvadranta.

- Ako je $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ onda $y_1 \to 0$ i $y_2 \to 0$ kada $t \to \infty$, odnosno $y_1 \to \infty$ i $y_2 \to \infty$ ako $t \to -\infty$. Singularna tačka $(0,0)$ je je u tom slučaju stabilan čvor (Slika 14).



- Ako je $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, tada se trajektorije udaljavaju od tačke $(0,0)$ kada $t \to \infty$, pa je ova tačka nestabilan čvor.

- Ako je $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ trajektorije su hiperbole a za tačku $(0,0)$ kažemo da je sedlo (Slika 15).



Slika 15.

Dakle, možemo zaključiti da se linearnom transformacijom ne mijenja topološka struktura integralnih krivih. Odnosno, u ostalim slučajevima:

- Za $\lambda_{1,2} = \mu \pm \eta$ i $\mu \neq 0$ singularna tačka je fokus, a za $\mu = 0$ je centar.
- Za $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, singularne tačke su sve tačke fazne ravni R^2.
- Ako je $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$ i $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$, singularna tačka je stabilna.

Prethodna diskusija se može u nekim slučajevima primjeniti i za ocjenu ponašanja trajektorija nelinearnog sistema DJ (4) u okolini ekvilibrijuma. Odnosno, uvijek možemo pretpostaviti da je $(0,0)$ ekvilibrijum sistema DJ (4), tj. da je prethodno izvršena obostrano jednoznačna transformacija koordinata kojom je ekvilibrijum sistema DJ (4) preslikan u tačku $(0,0)$.

GRANIČNI CIKL I SINGULARNE LINIJE

Za formiranje faznog portreta dinamičkog sistema (4), pored određivanja kritičnih tačaka i ispitivanja ponašanja trajektorija u okolini tih tačaka, potrebno je i klasifikovati trajektorije. Pri tome se uočavaju granični cikli koji dijele faznu ravan na disjunktne oblasti u kojima se nalaze trajektorije istog tipa.

Granični cikli sistema sa dva stepena slobode imaju mnogo specijalnih osobina koje nam omogućavaju da se odredi struktura trajektorija kroz ispitivanje singularnih tačaka i odgovarajućeg graničnog cikla. U dvodimenzionalnom slučaju struktura trajektorija je okarakterisana osobinom da se one ne mogu uzajamno sjeći.

Posmatrajući fazne trajektorije sistema DJ (4) u blizini graničnog cikla, uočavamo sljedeće tipove graničnog cikla:

- Granični cikl je stabilan, ako se fazne trajektorije približavaju graničnom ciklu kada $t \to \infty$ (sa unutrašnje i spoljašnje strane).
- Granični cikl je nestabilan, ako se fazne trajektorije približavaju graničnom ciklu kada $t \to -\infty$ (sa unutrašnje i spoljašnje strane).
- Granični cikl je polustabilan, ako se fazne trajektorije približavaju graničnom ciklu sa jedne strane kada $t \to \infty$ a sa druge strane kada $t \to -\infty$.

Možemo zapaziti da se u slučaju nestabilnog graničnog cikla sve trajektorije udaljavaju od njega kada $t \to \infty$. A kod polustabilnog graničnog cikla fazne trajektorije se približavaju graničnom ciklu iznutra (spolja) a udaljavaju se od njega spolja (iznutra).

Dakle, raspored zatvorenih integralnih krivih ima veliki značaj za određivanje strukture integralnih krivih (ili trajektorija).

Literatura

1. Ć. Dolićanin, *Matematika III (I-dio),* Priština, 1994.
2. E. Hairer, s. P. Norset, G. Wanner, *Solving Ordinary Di¤erential Equations I - Nonstiff Problems*, Springer-Verlag, London, 1987.
3. E. Pap, *Parcijalne diferencijalne jednačine*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.
4. H. Kraljević, S. Kurepa, *Matematička analiza 4/1*, tehnička knjiga, Zagreb, 1986.
5. I. Aganović, K. Veselić, *Linerne diferencijalne jednačine*, Zagreb, 1997.
6. I. Demirdžić, *Numerička matematika*, Univerzitetska knjiga Sarajevo, 1997.
7. I. Ivanušić, *Numerička matematika, Primijenjena matematika*, Element, Zagreb, 2002.
8. K. L. Cooke, I. Gyori, *Numerical approximation of the solution of the dealy differential equations on an infinite interval using piecewise constans arguments*, IMA 683, 1990.
9. M. W. Hirsch, *Stability and convergence in strongly monotone dynamical systems,* Math.,383, 1988.
10. S. Aljančić, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.
11. S. Janković, J. Knežević-Mihajlović, *Diferencijalne jednačine II*, Matematički fakultet, Beograd, 2003.
12. S. Kim, *Numerical Methods for Differential Equations*, Lexington, Kentucky, USA, 2002.
13. T. Pejović, *Diferencijalne jednačine-egzistencija rješenja*, Beograd, 1965
14. T. V. Davies, E. M. James, *Nonlinear Differential Equations*, Addison-Wesley Pybishing Company, 1996.
15. V. Lakshmikantham, S. Leela, A. A. Martynyuk, *Stability Analysis of Nonlinear Systems*, New York 2001.