

Safet Hamedović
Mirsad Subašić

PERIODIČNA RJEŠENJA PROIZVOLJNE DUŽINE CJELOBROJNE DIFERENTNE JEDNADŽBE

Sažetak

U ovom radu razmatrana je jedna cjelobrojna diferentna jednačba oblika:

$$y_{n+1} = [ay_n] - y_{n-1}, \{a \in \mathbb{R}, |a| < 2, a \neq 0, a \neq \pm 1\}, y_0, y_1 \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

gdje $[x]$ označava najmanji cijeli broj koji nije manji od x . Za vrijednost parametra $a = 0, \pm 1$ posmatrana jednačba je linearna, i ne razmatra se u ovom radu. Za $a = 3/2$, (1) postaje oblika

$$y_{n+1} = \begin{cases} \frac{3y_n + 1}{2} - y_{n-1}, & \text{ako je } y_n \text{ neparan,} \\ \frac{3y_n}{2} - y_{n-1}, & \text{ako je } y_n \text{ paran,} \end{cases}$$

poznata pod nazivom „ $3x + 1$ iteracija“. Autori su dokazali ultimativnu rekurentnu osobinu za cjelobrojnu diferentnu jednačbu (1) za sve početne vrijednosti $y_0, y_1 \in \mathbb{Z}$ i sve vrijednosti parametra $-2 < a < 2$.

Posmatrana cjelobrojna diferentna jednačba (1) se može transformisati u sistem prvog reda sa dvije promjenljive transformacijom $T(x, y) = (y, [ay] - x)$. Jednostavnost transformacije (preslikavanja) od T ne daje nagovještaj složenosti koju pokazuje „rasturanje“ na dijagramu kod nekih rješenja.

Ključne riječi: diferentna jednačba, periodična rješenja, samosličnost

Summary

In this work we considered integer difference equation of second order of forms:

$$y_{n+1} = [ay_n] - y_{n-1}, \{a \in \mathbb{R}, |a| < 2, a \neq 0, a \neq \pm 1\}, y_0, y_1 \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

where $[x]$ denotes minimal integer which is not lower than of x . For the parameter value $a = 0, \pm 1$ this equation is linear, and that case is not considered in this work. For $a = 3/2$, equation (1) becomes

$$y_{n+1} = \begin{cases} \frac{3y_n + 1}{2} - y_{n-1}, & \text{if } y_n \text{ odd,} \\ \frac{3y_n}{2} - y_{n-1}, & \text{if } y_n \text{ even,} \end{cases}$$

which is known as „ $3x + 1$ iteration“. Authors have proved the recurrent characteristic for the integer difference equation (1) for all starting values $y_0, y_1 \in \mathbb{Z}$ and all parametar values $-2 < a < 2$.

The given integer difference equation (1) can be transformed to the first order system with two variables by using transformation $T(x, y) = (y, [ay] - x)$. Simplicity of transformation (mappings) of T do not give us signs of complexity which shows „messing up“ on the diagram at some solutions.

Key words: difference equation, periodic solutions, self-similarity

1. Uvod

Nelinearne diferentne jednadžbe, odnosno sistemi diferentnih jednadžbi imaju sve širu primjenu u mnogim područjima nauke, prije svega u matematičkoj biologiji, epidemiologiji i ekonomiji, gdje

$(n+1)$ -va generacija (ili stanje) zavisi od n prethodnih generacija ili stanja. Imajući na umu značaj proučavanja diferentnih jednadžbi i sistema diferentnih jednadžbi, u ovom radu smo se odlučili da detaljnije proučimo ponašanje periodičnih rješenja proizvoljne dužine nelinearne cjelobrojne diferentne jednadžbe drugog reda

$$y_{n+1} = [ay_n] - y_{n-1}, \{a \in \mathbb{R}, |a| < 2, a \neq 0, a \neq \pm 1\}, y_0, y_1 \in \mathbb{Z}$$

Naravno, sistem prvog reda koji predstavlja ovu jednadžbu dokazano ima samoslična i haotična rješenja u cjelobrojnoj ravni (vidi [1]).

U radu autori dokazuju da su sva rješenja nelinearne cjelobrojne diferentne jednadžbe drugog reda

$y_{n+1} = [ay_n] - y_{n-1}, \{a \in \mathbb{R}, |a| < 2, a \neq 0, a \neq \pm 1\}, y_0, y_1 \in \mathbb{Z}$
periodična.

Analizirajmo nelinearnu diferentnu jednadžbu drugog reda
 $y_{n+1} = [ay_n] - y_{n-1}, \{a \in \mathbb{R}, |a| < 2, a \neq 0, a \neq \pm 1\}, y_0, y_1 \in \mathbb{Z}$ (1.1)
gdje $[x]$ označava najmanji cijeli broj koji nije manji od x . Poznato
je da za $a = 0, \pm 1$ posmatrana jednadžba je linearna, pa nećemo
razmatrati te vrijednosti u ovom radu. Pored prirodne generalizacije
na diskretni prostor, postoje bar tri razloga zašto je (1.1) interesantna.

Prvo, za $a = 3/2$, (1.1) postaje

$$y_{n+1} = \begin{cases} \frac{3y_n + 1}{2} - y_{n-1}, & \text{ako je } y_n \text{ neparan} \\ 3\frac{y_n}{2} - y_{n-1}, & \text{ako je } y_n \text{ paran,} \end{cases} \quad (1.2)$$

varijanta drugog reda poznata pod nazivom „ $3x + 1$ iteracija“. Trenutno, koliko znamo, ultimativna konvergencija ka 1 $3x + 1$ iteracije ostaje nedokazana hipoteza. Nasuprot tome, mi ćemo dokazati ultimativnu rekurentnu osobinu (1.1) za sve početne vrijednosti $y_0, y_1 \in \mathbb{Z}$ i sve vrijednosti parametra $-2 < a < 2$. Početno tvđenje je da je rješenje uvijek rekurentno. Štaviše, rješenja (1.1) mogu biti periodična sa proizvoljnom dužinom (Teoreme 2.2, 3.2).

Drugo, metod korišten za zaključak o periodičnosti svih rješenja (1.1) je elegantan i potencijalno šire upotrebljiv. Bez ovog metoda ne bismo čak mogli ni dokazati da su rješenja specijalnog slučaja (1.2) jednadžbe (1.1) ograničena (vidi [2]).

Treće, posmatrana diferentna jednadžba (1.1) se može transformisati u sistem prvog reda sa dvije promjenljive transformacijom $T(x, y) = (y, [ay] - x)$. Jednostavnost transformacije (preslikavanja) od T ne daje nagovještaj složenosti koju pokazuje „rasturanje“ na dijagramu kod nekih rješenja. Vidjeti figure 4.1- 4.4.

1.1 Samosličnost, fraktali i kaos

Teorema 1.1. Neka je (X, d) kompletan metrički prostor. Neka su $f_i: X \rightarrow X$ ($i = 1, 2, \dots, N$) kontrakcije metričkog prostora (X, d) . Tada postoji jedinstven neprazan kompaktan podskup K skupa X takav da je $K = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \dots \cup f_N(K)$.

Definicija 1.1. Skup K iz prethodne teoreme nazivamo **samosličnim** s obzirom na $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ (vidi [6]).

Neformalno rečeno, objekat je samosličan ako se može razložiti na dijelove koji su umanjena kopija cjeline. Najpoznatiji primjer samosličnih skupova su fraktali. Fraktale karakteriše (vidi [7]):

- (i) Neki oblik samosličnosti (tačne, približne ili statističke),
- (ii) Fina struktura na svakom nivou uvećanja,
- (iii) Prevelika nepravilnost da bi se mogli opisati klasičnim geometrijskim jezikom,
- (iv) Obično je Hausdorff-ova dimenzija veća od topološke¹,
- (v) U većini slučajeva je fraktal definisan jednostavnom rekurentnom relacijom.

Prirodni oblici koji pokazuju fraktalne karakteristike su: oblaci, morska obala, munje, planinski lanci, snježne pahuljice, neke vrste biljaka itd.

Teorija haosa se bavi pojavama specifičnog tipa nepredvidljivosti, čije ponašanje je determinističko sa velikom osjetljivošću na početne uslove. Naime, male promjene početnih uslova mogu dovesti do ogromnih promjena u ponašanju pojave. Treba istaći da takvi procesi nisu stohastički, iako se ponekad tako čini. To su u potpunosti deterministički procesi koji podliježu određenim fizičkim i matematičkim zakonima i kao takvi potpuno su predvidljivi uz savršen uvid u početne uslove. Klasičan primjer je vremenska prognoza koju je moguće sa zadovoljavajućom preciznošću dati za otprilike sedam dana unaprijed, iako bi teoretski ona mogla da se da za bilo koji dan u budućnosti (uz ignoriranje efekata Heisenberg-ovog principa neodređenosti).

1.2 $3x + 1$ iteracija

$3x + 1$ problem (poznat kao Collatz-ov problem, Kakutanijev problem) razmatra iteracije funkcije $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, definisane sa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{2}, & \text{ako je } x \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{x}{2}, & \text{ako je } x \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

¹ Termin fraktal je uveo B. Mandelbrot Š5Ć. On je definisao fraktal kao skup čija je Hausdorff-ova dimenzija strogo veća od topološke. Ovakva definicija, međutim, isključuje brojne skupove koji imaju „fraktalne“ karakteristike.

Hipoteza (još uvijek nedokazana) je da za svaki prirodan broj d postoji k takav da je $f^k(d) = 1$, gdje koristimo oznake

$$f^1(d) = f(d), (\forall k \geq 2) f^k(d) = f(f^{k-1}(d)).$$

Stavljajući recimo $d = 13$, dobijamo niz iteracija

$$13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots$$

Vrijednosti 1 i 2 se dalje ciklično ponavljaju. Mnoštvo primjera (sa različitim početnim vrijednostima d) daje opravdanje za ovu hipotezu.

Svako rješenje diferentne jednačbe

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{3x_n + 1}{2}, & \text{ako je } x_n \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{x_n}{2}, & \text{ako je } x_n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

sa početnim uslovom $x_0 = d, d \in \mathbb{N}$ je eventualno periodično, sa period-2 rješenjem $\{1, 2\}$.

Pregled važnijih rezultata vezanih za $3x + 1$ problem je dat u [8].

1. Kvalitativno ponašanje rješenja

Označimo sa (x, y) tačke u cjelobrojnoj ravni $\mathbb{Z}^2$, i neka realni parametar a zadovoljava $|a| < 2$. Transformacijom

$$T(x, y) = (y, [ay] - x), \quad X_n = (x_n, y_n) = T^n(x_0, y_0), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

se jednačba (1.1) svodi na sistem diferentnih jednačbi prvog reda.

Primjedba 2.1. Niz (y_n) koji se pojavljuje kao druga koordinata u svakom izrazu (X_n) je isti niz kao i onaj generisan sa (1.1) za $x_0 = [ay_0] - y_1$.

Prvi utisak o rotacionom kretanju rješenja je dobijen iz stepena matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$, Jakobijeve matrice preslikavanja T izuzimajući uticaj funkcije $[\]$. Zbog $|a| < 2$, A ima kompleksne sopstvene vrijednosti. Nakon dijagonalizacije A dobijamo

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) - \frac{a \sin(n\theta)}{\sqrt{4-a^2}} & \frac{2 \sin(n\theta)}{\sqrt{4-a^2}} \\ -\frac{2 \sin(n\theta)}{\sqrt{4-a^2}} & \cos(n\theta) + \frac{a \sin(n\theta)}{\sqrt{4-a^2}} \end{pmatrix}, \theta = \arccos\left(\frac{a}{2}\right). \quad (2.2)$$

Identitet $x^2 + y^2 - axy = y^2 + (ay - x)^2 - ay(ay - x)$ predstavlja familiju invarijantnih elipsi $E(x, y) = x^2 + y^2 - axy$ za linearnu jednačinu. Slika 2.1 prikazuje elipsu $x^2 + y^2 - (1/2)xy$ determinisanu sa $a = \frac{1}{2}$ i $(x_0, y_0) = (0, 32)$, kao i prvih šest iteracija od T primijenjenih na $(x_0, y_0) = (0, 32)$: $(0, 32), (32, 16), (16, -24), (-24, -28), (-28, 10)$ i $(10, 33)$. Sve ove tačke leže na elipsi $x^2 + y^2 - (1/2)xy = 1024$ jer je funkcija $[\]$ neaktivna. Prvi neparan y_n na koji funkcija $[\]$ ima uticaj je $y_5 = 33$, i očekujemo da $T(10, 33)$ ne leži na ovoj elipsi. Zaista, $33^2 + 7^2 - (1/2) \cdot 33 \cdot 7 = 1022.5 \neq 1024$.

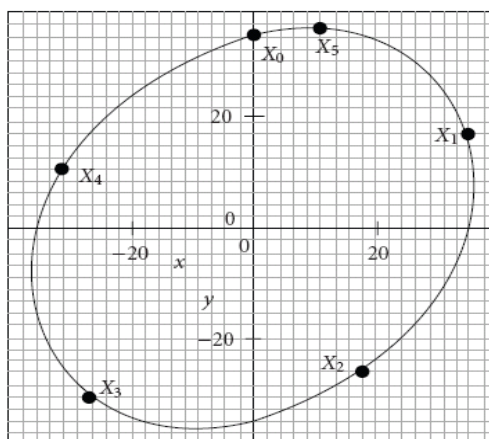
Kretanje u smjeru kazaljke na satu u $\mathbb{Z}^2$ iteracija od T još je jasnije pogledom na vektorsko polje na slici 2.2 za $a = 1/3$. Svaki usmjereni segment u (x, y) ima oblik $T(x, y) - (x, y)$ i pokazuje prema $T(x, y)$. Ovo se jasno vidi na slici 2.2 za orbitu sa početnom tačkom $(1, 0)$. Vektorsko polje je podijeljeno u četiri kvadranta sa granicama $y = x$ i step-lokusom

$y = [ay] - x$. Svaki linearni segment ovog lokusa uključuje gornju lijevu krajnju tačku a isključuje donju desnu krajnju tačku. Kvadranti su određeni znakom komponenti vektora pravca: $\Delta x > 0 (\leq 0)$ ili $\Delta y > 0 (\leq 0)$. Uopšte, rotacija u smjeru kazaljke na satu i grube eliptičke orbite lako se dobijaju za sve vrijednosti $-2 < a < 2$ i početni uslov $(x_0, y_0) \neq T(x_0, y_0)$.

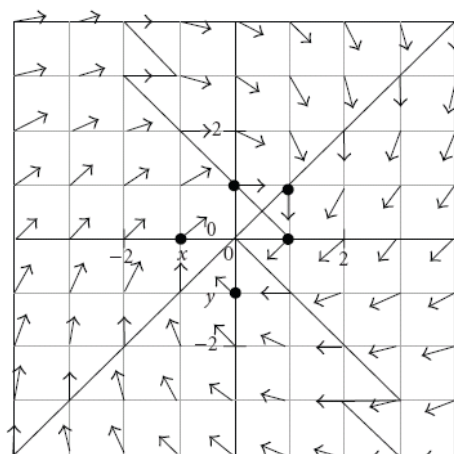
TEOREMA 2.2. *Za različite od nule racionalne $a = p/q$ gdje su p i q uzajamno prosti, broj različitih vrijednosti u rješenju y_n može biti proizvoljno velik u zavisnosti od početnih uslova.*

Dokaz. Posmatrajući primjer sa Slike 2.1 biramo početne uslove tako da funkcija $[\]$ bude neaktivna željeni broj puta, čime nelinearna jednačina (1.1) praktično postaje linearna. Stavimo $y_0 = q^m, y_1 = pq^{m-1}$ sa po želji velikim pozitivnim m . Kao i ranije, sa A označimo matricu odgovarajućeg linearnog sistema. Indukcijom se može pokazati da je

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{-f_{n-2}}{q^{n-2}} & \frac{f_{n-1}}{q^{n-1}} \\ \frac{-f_{n-1}}{q^{n-1}} & \frac{f_n}{q^n} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$



Slika 2.1. $a = 1/2, X_0 = (0, 32)$.



Slika 2.2. $a = 1/3, X_0 = (1, 0)$.

gdje je $f_{-1} = 0, f_0 = 1$, i $f_n(p, q) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} (-1)^k p^{n-2k} q^{2k}$ za $n > 0$.

Posljedica uzimanja relativno prostih p i q je da q nikada neće dijeliti f_n za $n \geq 0$; koeficijent uz p^n u f_n je uvijek 1. Uzastopna primjena matrice A na početni vektor $(0, q^m)$ daje opštu formu prvih $m + 1$ iteracija: $y_n = f_n q^{m-n}$. One su sve različite jer najveći stepen od q koji dijeli svaku je različit.

Nasuprot tome, sljedeći primjer pokazuje da, ako a nije racionalan, ne slijedi da postoji proizvoljno mnogo različitih iteracija jednostavno zbog toga što početna vrijednost može biti proizvoljno velika (vidjeti sliku 4.1).

Primjer 2.3. Neka je $a = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.6180339 \dots$ tj. $\theta = 2\pi/5$ u (2.2), ranije. Neka je $y_0 = 1, y_1 = 10^n$ za $n \geq 0$. Sa ovim početnim uslovima sva rješenja imaju period 5. Rješenja su prikazana ispod za $n = 0, 1, 2, 3$ i 6.

n	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$y_6, \dots$
0	1,	1,	0,	-1,	0,	1,	1, ...
1	1,	10,	6,	-6,	-9,	1,	10, ...
2	1,	100,	61,	-62,	-99,	1,	100, ...
3	1,	1000,	618,	-618,	-999,	1,	1000, ...
6	1,	10^6 ,	618033,	-618034	$1 - 10^6$,	1,	$10^6, \dots$

Treba primijetiti vezu između y_2 i y_3 : ponekad je $y_3 = -y_2$, a ponekad $y_3 = -y_2 - 1$. Lako je vidjeti da je $y_2 = [10^n a]$, gdje $[x]$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od x . Uz malo više računa, koristeći činjenicu da je $a^2 + a - 1 = 0$, možemo dokazati da je $y_3 = -y_2$ ako i samo ako je $1 - a < |10^n a| - 10^n a$, inače je $y_3 = -y_2 - 1$.

2. Periodičnost rješenja

Involucija je preslikavanje V takvo da je kvadrat od V identitet, tj. $V^2 = V \cdot V = I$. Sljedeća lema obezbjeđuje osnovni aparat pri dokazivanju da su sva rješenja (1.1) periodična.

LEMA 3.1. Neka je T definisano kao u (2.1) ranije, i $S(x, y) \equiv T^{-1}(x, y) = ([ax] - y, x)$. Involucija $V(x, y) = (y, x)$ zadovoljava $VT = SV$ i $TV = VS$. To povlači da su preslikavanja VT, VS, TV i SV involucije.

Dokaz. Imamo

$$V(T(x, y)) = V(y, [ay] - x) = ([ay] - x, y) = S(y, x) = S(V(x, y)) \quad (3.1)$$

Množenjem $VT = SV$ sa lijeve i desne strane sa V dobijamo $TV = VS$, što koristimo za dokaz da je $VTVT = VVST = I$. Dakle, VT je involucija, a slično dokazujemo da su involucije i VS, TV , i SV .

Rješenje jednačine (1.1) zovemo *invarijantnim* nad V ako skup tačaka

$$O = \{X_n \in \mathbb{Z}^2: X_n = T^n(X_0), n = 0, 1, 2, \dots\}$$

zadovoljava $V(O) = O$. Geometrijski, za $V(x, y) = (y, x)$, ovo znači da je graf iteracija simetričan u odnosu na pravu $y = x$, npr. vidjeti sliku 2.2. Za racionalno a numerički eksperimenti su pokazali da je ova invarijantnost preovlađujuća, tvrdimo da se ona javlja sa vjerovatnoćom 1. Vidjeti posljedicu teoreme 3.2. Za rješenja invarijantna nad V lema dokazuje periodičnost odmah:

$$X_0 = TVTV(X_0) = TVT(X_k) = TV(X_{k+1}) = T(X_m) = X_{m+1} \quad (3.2)$$

Teorem 3.2. Za $a \in \mathbb{R}, |a| < 2$ sva rješenja (1.1) su periodična.

Dokaz. Neka rješenja (1.1) počinju sa $y_0, y_1, \dots$. Uzmimo da je $X_0 = ([ay_0] - y_1, y_0)$ iz $\mathbb{Z}^2$ (vidi primjedbku 2.1). Preslikavanja T , S , i V su definisana kao u (2.1) i Lemi 3.1. Stavimo $Y_0 = V(X_0)$ i $Y_{k(n)} = V(X_n)$ za $n = 1, 2, 3, \dots$. Vrijednost za k je određena primjenom leme u (3.1) ispod: k je broj primjena preslikavanja S na tačku $V(X_n)$ tako da tačke $Y_k, Y_{k-1}, Y_{k-2}, \dots$ rotiraju (suprotno od smjera kazaljke na satu) nazad do Y_0 (vidi sliku 3.1).

$$Y_{k-1} = S(Y_k) = SV(X_n) = VT(X_n) = V(X_{n+1}) \quad (3.3)$$

$$Y_{k+1} = T(Y_k) = TV(X_n) = VS(X_n) = V(X_{n-1})$$

Ponovo, primjenom iste leme, (3.1) povlači da n primjena preslikavanja T na $V(X_n)$ pomjera $Y_k, Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots$ (u smjeru kazaljke na satu) do $Y_{k+n} = V(X_0) = Y_0$. Tako, niz (Y_k) je periodičan. Prema definiciji, između (X_n) i (Y_k) postoji 1 – 1 korespodencija (simetrija u odnosu na pravu $y = x$). Prema tome, i niz (X_n) je periodičan. Specijalno, iz sistema (3.3) slijedi $Y_0 = V(X_0) = V(X_{n+k})$; odakle je $X_0 = X_{n+k}$. U skladu sa primjedbom 2.1, sva rješenja (1.1) su periodična.

Na slici 3.1 tačke niza (X_n)

$$(2, -3), (-3, -6), (-6, -5), (-5, -1), (-1, 4), (4, 7), (7, 6), (6, 2), (2, -3) \quad (3.4)$$

su označene crnim kružićima. Tačke niza (Y_k) , koje čitamo zdesna ulijevo u (3.4) sa V primijenjenim na svaki par, su označene otvorenim kružićima na slici 3.1. Sljedeća posljedica se odnosi na specijalan slučaj kada početni par leži na pravoj $y = x$.

Posljedica 3.3. Za $a \in \mathbb{R}, |a| < 2$ i $X_0 = (y_0, y_0)$ sva rješenja (1.1) su invarijantna nad V .

Dokaz. Rješenja su periodična prema teoremi 3.2. Pretpostavimo da, za dato a i $X_0 = (y_0, y_0)$, rezultujuće rješenje ima najmanji period N , tako da je $X_0 = X_N$. Zbog toga što $V(X) = X$ leži na pravoj $y = x$, lema daje

$$X_1 = T(X_0) = TV(X_0) = VS(X_N) = V(X_{N-1}) \quad (3.5)$$

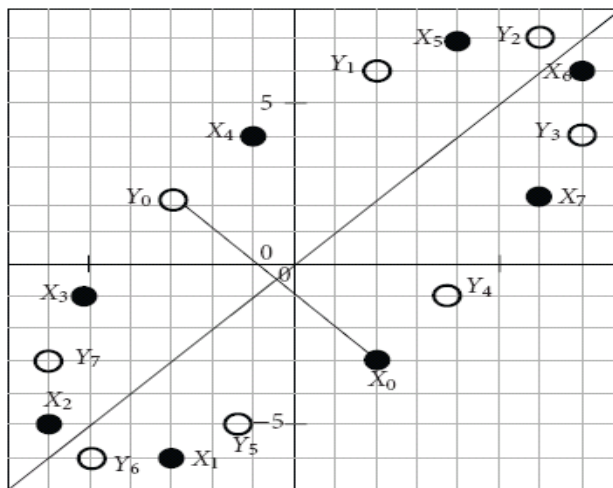
Dalje,

$$X_2 = T(X_1) = TV(X_{N-1}) = VS(X_{N-1}) = V(X_{N-2}) \quad (3.5)$$

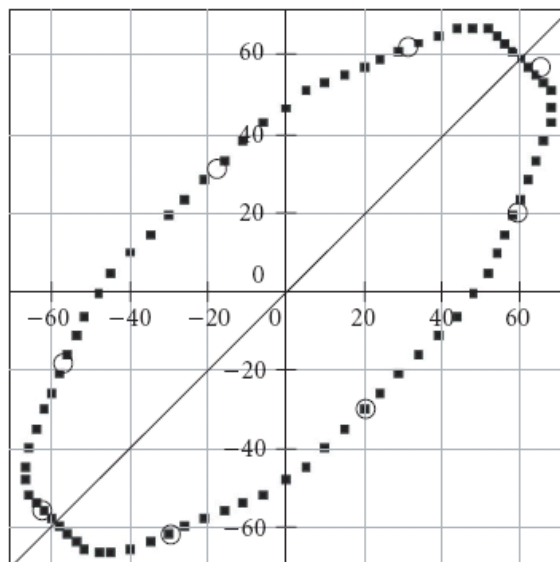
Nastavljajući ovako se dobija

$$X_k = V(X_{N-k}) \text{ za } k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

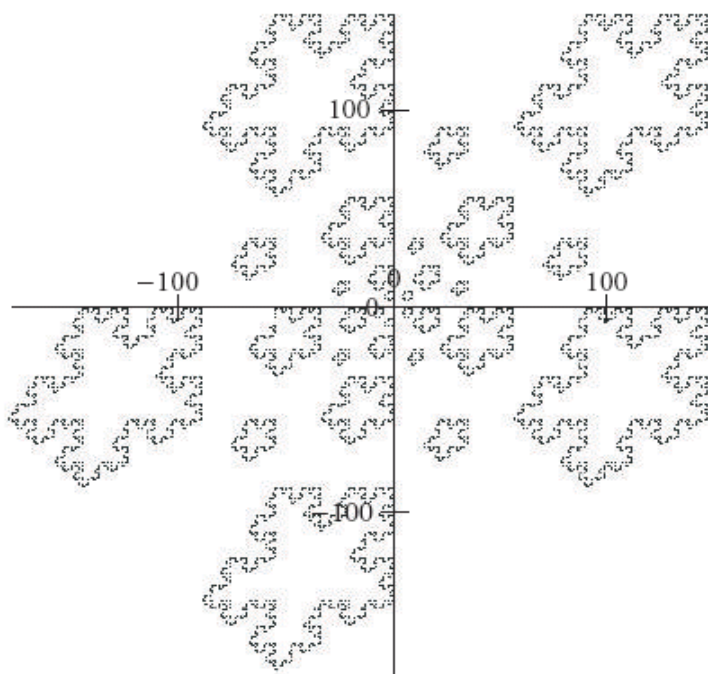
Reindeksiranjem, jasno je da ako bilo koja iteracija padne na pravu $y = x$, preostala trajektorija postaje simetrična u odnosu na ovu liniju. Možda ovo objašnjava zašto ima tako mnogo invarijantnih rješenja kada je a racionalan. Ugao rotacije $\theta = \arccos(a/2)$ nikad nije racionalni multiplikator od π za netrivialne racionalne a , tj. $a \neq 0, \pm 1$ (vidi Š3Ć), pokazujući velik broj iteracija u odnosu na veličinu X_0 . Veća gustoća mnoštva tačaka trajektorije daje veću vjerovatnoću da jedna od njih padne na pravu $y = x$. U svakom slučaju mali period neinvarijantnih rješenja sa racionalnim $a = 7/5$ prikazan na slici 3.1, zasnovan je na uočavanju da je $a = 7/5 = 1.4$ zadovoljavajuća aproksimacija za $\sqrt{2} = 2 \cos(2\pi/8)$ za malu početnu tačku; odatle period 8 u rješenju (3.4). Očekivano, sa istim $a = 7/5$ i većim $X_0 = (20, -30)$, dobijamo period 79, V -invarijantno rješenje prikazano na slici 3.2. U ovom rješenju označenom crnim kvadratićima, $X_{59} = (60, 60)$. Prema posljedici iznad, cijela orbita je simetrična u odnosu na pravu $y = x$. Ostavljajući početnu tačku $X_0 = (20, -30)$ i mijenjajući a na $a = \sqrt{2}$, vraćamo se na neinvarijantno rješenje sa periodom 8 prikazano praznim kružićima na slici 3.2.



Slika 3.1. Zbir indeksa od X_n i $V(X_n)$ uvijek je jednak 8.



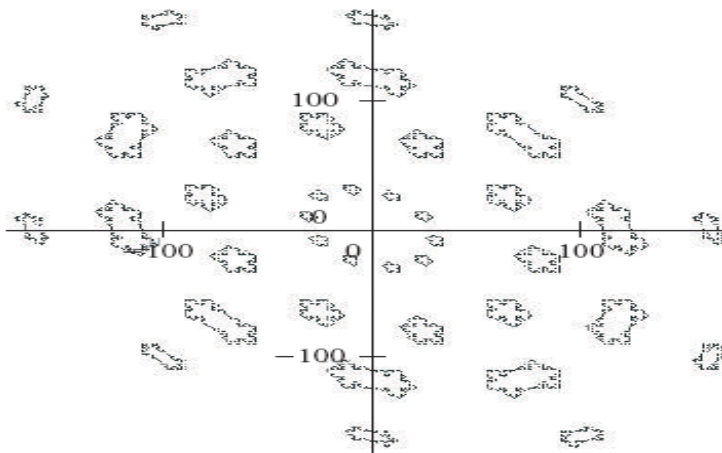
Slika 3.2. $X_0 = (20, -30)$, $a = 7/5 = 1.4$ (crni kvadratići);
 $a = \sqrt{2}$ (prazni kružići).



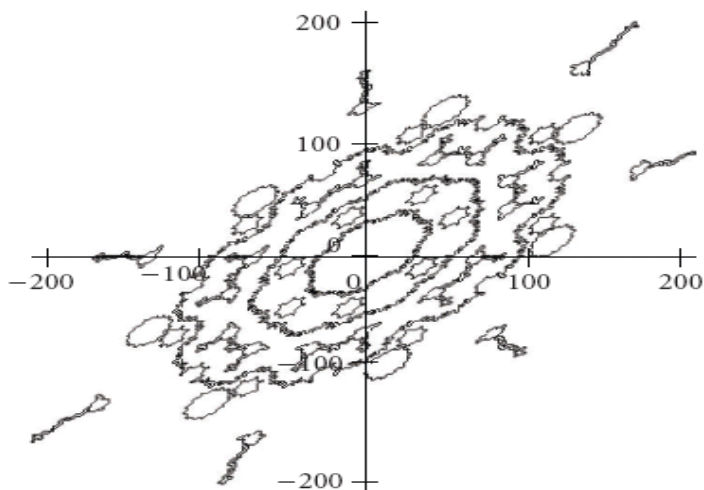
Slika 4.1. $a = (\sqrt{5} - 1)/2, \theta = 2\pi/5$.

3. Samosličnost i kaos

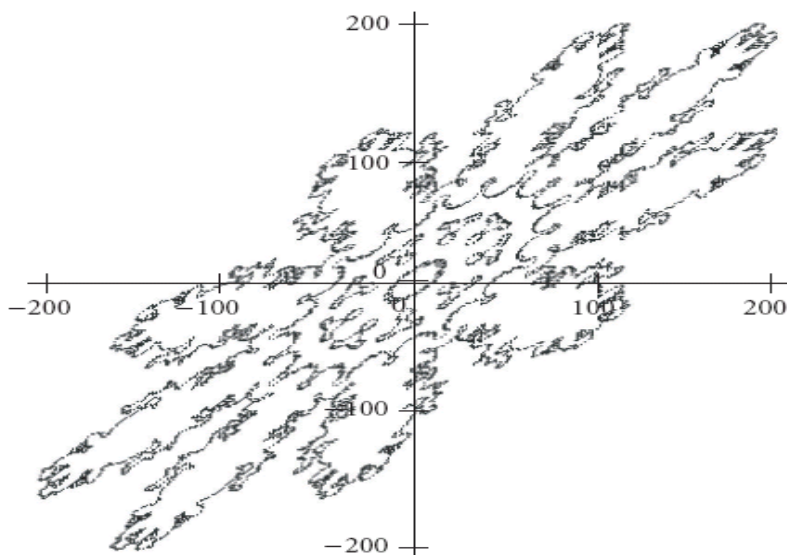
Prisutnost simetrije u gruboj iteraciji, možda slučajna zbog pogodnog broja, veoma je upadljiva. Što je još nevjerovatnije, kako početne vrijednosti postaju veće tako proces može generisati sliku sa samosličnom složenošću kao nasumično obavljanje širom ravni. Vidjeti slike 4.1 i 4.2. Svaka od slika 4.1 - 4.4 pokazuje različit izbor parametra a i nekoliko orbita za svaki izbor. Čak je kaos moguć za specifične početne uslove kada je $a = 2\cos\theta$ i θ racionalan multiplikator od π . Takva rješenja daju izvor za sasvim neočekivane strukture kako početna tačka postaje veća. Naprimjer, slika 4.4 pokazuje samo četiri orbite, sa bizarnim izraslinama koje formiraju jednu krajnju orbitu. Iako se čini neosporno da fraktalne zvijezde u slici 4.1 nastavljaju da šire svoju ponovljenu složenost, teško je reći što se može pojaviti iz nejasnih bio-reproduktivnih oblika u slici 4.3 kada bi ih zumirali. Evidentno, samo distanca od izvora podesno izabranih početnih vrijednosti ograničava složenost ovih slika.



Slika 4.2. $\alpha = (1 - \sqrt{5})/2, \theta = 3\pi/5$.



Slika 4.3. $\alpha = 2 \cos(2\pi/7), \theta = 2\pi/7$.



Slika 4.4. $a = 2 \cos(2\pi/9)$, $\theta = 2\pi/9$.

Literatura

1. D. Clark, *Periodic solutions of arbitrary length in a simple integer iteration*, Advances in Difference Equations (2006), 1-9.
2. D. Clark and J.T. Lewis, *Symmetric solutions to a Collatz-like system of difference equations*, Congr. Numer. 131 (1998).
3. G. James and R. C. James, *Mathematics Dictionary*, 4th ed., Van Nostrand Reinhold, New York, 1976.
4. I. Niven, *Irrational Numbers*, The Carus Mathematical Monographs, no. 11, The Mathaemtical Association of America. Distributed by John Wiley & Sons, New York, 1956.
5. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, New York, 1982.
6. J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge University Press, 2001.
7. K. Falconer, *Fractal Geometry – Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, 1990.
8. J. C. Lagarias, *The $3x + 1$ Problem*, An Annotated Bibliography (1963-1999), arXiv:math/0309224v12.
9. S. N. Chow and J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York Inc. 1982.