

Almir Huskanović
Safet Penjić

POSTUPAK PARAMETRIZACIJE KRIVE PRI RAČUNANJU KRIVOLINIJSKOG INTEGRALA

Sažetak

Krivolinijski (linijski, krivuljni) integrali imaju veliki značaj u čistoj i primljenoj matematici. Oni se dovode u vezu sa radom, potencijalnom energijom, strujanjem toplote, cirkulacijom fluida i drugih fizikalnih pojava u kojima se proučava ponašanje vektorskog ili skalarnog polja duž neke krive. U radu se prezentuje način parametrizacije jednačine zadane krive i računanje krivolinijskih integrala prve i druge vrste duž krive u ravni ili u prostoru.

Ključne riječi: parametrizacija, računanje krivolinijskog integrala, krive u ravni, parametarski oblik jednačine krive u ravni i prostoru

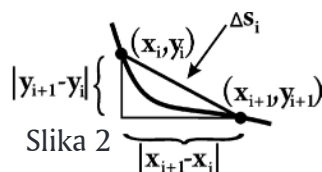
Summary

Line integrals are of fundamental importance in both pure and applied mathematics. They occur in connection with work, potential energy, heat flow, circulation of a fluid and other physical situations in which the behavior of a vector or scalar field is studied along a curve. In this paper we present how to write down a set of parametric equations for a given curve. Parametrization is a method of evaluating certain line integrals (of the first and second kind) along plane curves or space curves.

Key words: parametrization, evaluating line integrals, plane curves, parametric equations for plane curves and space curves.

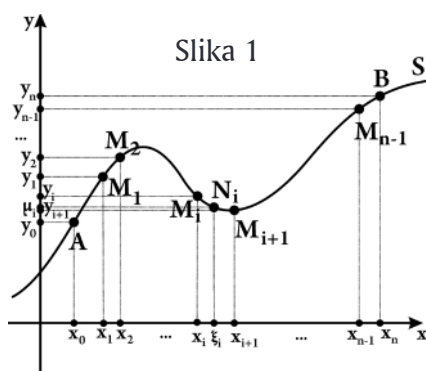
Krivolinijski integral prve vrste (po luku)

1. Definicija krivolinijskog integrala po luku



Slika 2

Neka je $\overline{AB} = s$ orijentisani luk¹ neke neprekidne krive S u xOy ravni, koja se može rektificirati², i neka je $f(x, y)$ neprekidna funkcija definisana³ na luku $\overline{AB} = s$ krive S (vidi sliku 1).



Slika 1

Napravimo podjelu luka $\overline{AB}$ na n parcijalnih lukova tačkama $A \equiv M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$, ..., $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$, $B \equiv M_n(x_n, y_n)$ i na svakom parcijalnom luku $\overline{M_i M_{i+1}}$ uzmimo po jednu proizvoljnu tačku $N_i(\xi_i, \mu_i)$. Označimo sa Δs_i vrijednost

$\Delta s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$ (primijetimo da Δs_i predstavlja približnu dužinu parcijalnog luka $\overline{M_i M_{i+1}}$ (vidi sliku 2)).

Formirajmo zbir

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \mu_i) \Delta s_i = f(\xi_0, \mu_0) \Delta s_0 + f(\xi_1, \mu_1) \Delta s_1 + \dots + f(\xi_{n-1}, \mu_{n-1}) \Delta s_{n-1}$$

¹ Orijetisani luk - luk za koji smo jedan kraj odredili da je početak luka i a drugi kraj luka.

² Rektificirati - naivno rečeno, ako "ispravimo" krivu, ona će biti konačne dužine. Definicija rektifikacije krive u ravni je sljedeća: Neka je dat luk AB koji je podijeljen na n parcijalnih lukova tačkama $A \equiv M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$, ..., $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$, $B \equiv M_n(x_n, y_n)$. Ovu podjelu označimo sa $P = \{M_0, M_1, \dots, M_n\}$. Ako je

suma $\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$ ograničena za sve podjele P luka

$\overline{AB}$, tada za luk kažemo da se može rektificirati. Neprekidna nerektificibilna funkcija je npr. $f(x) = x \cos(\pi(2x))$ za $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

³ Definisana - funkcija $f(x, y)$ u svakoj tački $M(x, y)$ luka $\overline{AB}$ ima određenu konačnu vrijednost.

koji se prostire na sve parcijalne lukove $\overline{M_i M_{i+1}}$. Granična vrijednost ovog zbira (pod uslovom da je konačna), kada se broj parcijalnih lukova $\overline{M_i M_{i+1}}$ uvećava beskonačno, tako da njihova dužina teži nuli (a time i Δs_i teži nuli), zove se **krivolinijski integral funkcije $f(x, y)$ po luku s (ili duž luka $\overline{AB}$) krive S** i obilježava se

$$\text{sa } \int_s f(x, y) ds \text{ (ili sa } \int_{\overline{AB}} f(x, y) ds \text{)}.$$

Prema tome

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \mu_i) \Delta s_i = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{\Delta s_i} f(\xi_i, \mu_i) \Delta s_i$$

2. Jedna primjena krivolinijskog integrala po luku

Ako u definiciji krivolinijskog integrala umjesto funkciju $f(x, y)$ stavimo 1 (jedinična funkcija - funkcija koja ima vrijednost 1 za sve realne x i y) dobit ćemo

$$\int_{\overline{AB}} 1 ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta s_i = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{\Delta s_i} \Delta s_i$$

a odavdje vidimo da krivolinijski integral $\int_{\overline{AB}} ds$ predstavlja dužinu luka $s = \overline{AB}$.

3. Postupak parametrizacije

Postavljamo pitanje: Zašto datu krivu uopće i trebamo parametrizirati? Odgovor na ovo pitanje nalazi se u teoremi 1. Poslije spomenute teoreme nameće se novo pitanje: Može li se krivolinijski integral izračunati i bez parametrizacije?

Teorema 1

Neka je kriva $\overline{AB} = s$ data u obliku parametarskih jednačina

$x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$, neka je glatka⁴ i neka nema singularnih⁵ tački. Dalje, neka je funkcija $f(x, y)$ neprekidna na luku s . Tada važi formula

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

Dokaz:

Pokušajmo objasniti šta za koordinatu x krive $g(x, y) = 0$ znači kada je data u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$. To znači da su vrijednosti $x_0, x_1, \dots, x_n$ (x -koordinate tačaka $M_0, M_1, \dots, M_n$ krive $g(x, y) = 0$) jedinstveno određena sa parametrom t . Pa recimo neka je interval $[\alpha, \beta]$ podijeljen sa $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$ tako da vrijedi $x_k = \varphi(t_k)$ $k = 1, 2, \dots, n$. (vidi sliku 3). Slična priča je i sa koordinatom y , s napomenom da je funkcija $\psi(t)$ po definiciji takva da vrijedi $y_k = \psi(t_k)$ za $k = 1, 2, \dots, n$.

Sad posmatrajmo

Δs_i i napišimo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta s_i$ pomoću novih parametarskih promjenjivih. Po definiciji je

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

. Tačka (x_0, y_0) u novim

oznakama ima oblik $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, tačka (x_1, y_1) postaje $(\varphi(t_1), \psi(t_1))$, ..., tačka (x_n, y_n) postaje $(\varphi(t_n), \psi(t_n))$. U novim oznakama Δs_i ima

oblik $\Delta s_i = \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2}$. Uvedimo oznaku

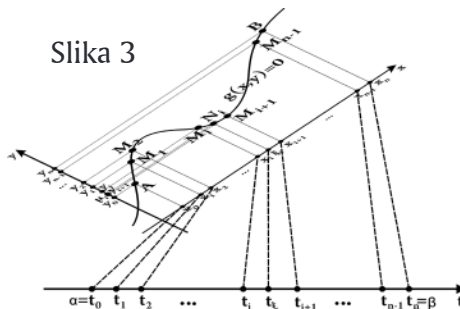
$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ i primijetimo sljedeće

⁴ Glatka - za funkciju kažemo da je glatka ako u svakoj tački ima izvod. Grafički to znači da funkcija nema "čoškova".

⁵ Singularna tačka - tačka (x_0, y_0) naziva se singularnom tačkom krive

$F(x, y) = 0$ ako je $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Tačke na krivoj koje nisu singularne nazivaju se običnim tačkama krive.

Slika 3



$$\Delta s_i = \Delta t_i \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2} = \Delta t_i \sqrt{\left(\frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2 + \left(\frac{\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2}$$

Prema definiciji izvoda znamo da $\lim_{t \rightarrow p} \frac{\varphi(p) - \varphi(t)}{p - t} = \varphi'(p)$, pa možemo zaključiti da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta s_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2 + \left(\frac{\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2} \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

(jasno je da $t_i \rightarrow t_{i+1}$ kad $n \rightarrow \infty$)⁶. Iskoristimo ovo i uvedimo parametarske jednačine $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$ u našu početnu

formulu $\int_{\mathcal{B}} f(x, y) d\mathbf{s}$ (prisjetimo se $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\mu_i \in [y_i, y_{i+1}]$ su

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} f(x, y) d\mathbf{s} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \mu_i) \Delta s_i = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i(t_{\xi_i}), \mu_i(t_{\mu_i})) \sqrt{\left(\frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2 + \left(\frac{\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2} \Delta t_i = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(t_{\xi_i}), \psi(t_{\mu_i})) \sqrt{\left(\frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2 + \left(\frac{\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2} \Delta t_i = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \end{aligned}$$

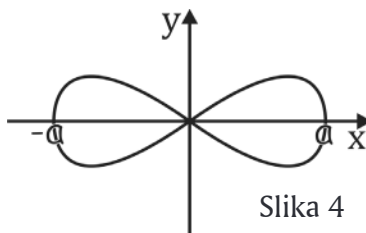
proizvoljne tačke).

što je i trebalo dobiti. Time je dokaz završen.

⁶ Ovdje smo iskoristili definiciju Rimanovog integrala. Radi cjeline teksta navedimo jednu od definicija Riman-Stiltesovog integrala: Neka je $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ particija intervala $[a, b]$, $\Delta \alpha_k \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$ i neka je t_k tačka podintervala $[x_{k-1}, x_k]$. Sumu oblika $S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \alpha_k$ zovemo Riman-Stiltesova suma funkcije f s obzirom na α . Kažemo da je f Riman-integrabilna s obzirom na α ako postoji broj A koji ima sljedeće osobine: Za svako $\varepsilon > 0$ postoji particija P_{ε} intervala $[a, b]$ takva da za svaku particiju P finiju od P_{ε} i za svaki izbor tački $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ imamo $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$.

Zadatak broj 1

Izračunati krivolinijski integral $\oint_C |y| ds$ gdje je kriva C lemniskata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (vidi sliku 4).



Slika 4

Rješenje:

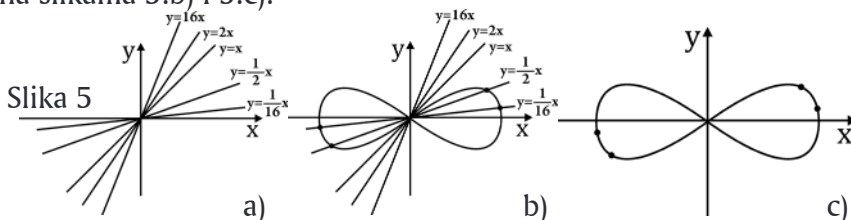
Zadatak ćemo riješiti na četiri načina. Na osnovu teoreme 1, ako je $x = \mu(t)$ $y = \eta(t)$ $t_1 \leq t \leq t_2$ parametarski oblik krive C , krivolinijski integral $\oint_C f(x, y) ds$ računamo po formuli:

$$\oint_C f(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(\mu(t), \eta(t)) \sqrt{(\mu'(t))^2 + (\eta'(t))^2} dt$$

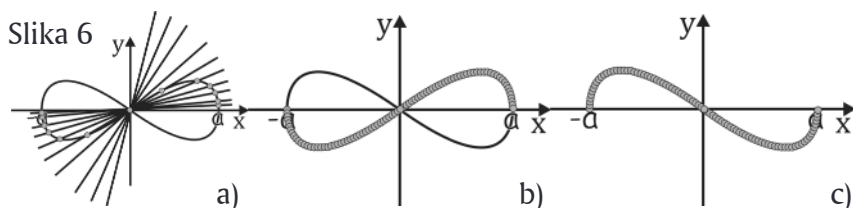
Prema tome, da bismo izračunali dati integral, potrebno je datu lemniskatu parametrizirati. Postupak parametrizacije ćemo pokazati na četiri različita načina.

I način (parametrizacija pomoću pravih)

Posmatrajmo nekoliko proizvoljnih pravih u ravni, recimo prave $y = \frac{1}{6}x$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $y = 2x$, $y = 6x$. Skice grafika ovih pravih u xOy ravni izgledaju kao na slici 5.a). Ako pokušamo naći presječne tačke ovih pravih sa lemniskatom, imat ćemo nešto kao na slikama 5.b) i 5.c).



Data prava sa lemniskatom može imati najviše dvije zajedničke tačke (vidi sliku 6.a)). Ako pustimo da parametar k iz familije pravih $y = kx$ uzima vrijednost od 0 do $+\infty$ i za svako fiksirano k nađemo presječnu tačku prave sa lemniskatom, imali bismo otprilike grafik kao na slici 6.b).



Na isti način, ako posmatramo prave oblika $y = kx$ gdje je $-\infty < k < 0$, dobili bismo grafik kao na slici 6.c).

Prema tome, lemniskatu c: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ možemo napisati u obliku

$$(x^2 + (kx)^2)^2 = a^2(x^2 - (kx)^2)$$

$$(x^2 + k^2x^2)^2 = a^2(x^2 - k^2x^2)$$

$$(1 + k^2)^2 x^4 = a^2(1 - k^2)x^2 \quad / : x^2$$

$$x^2 = \frac{a^2(1 - k^2)}{(1 + k^2)^2}$$

$$x = \pm \frac{a\sqrt{(1 - k^2)}}{1 + k^2} \Rightarrow y = \pm \frac{ka\sqrt{(1 - k^2)}}{1 + k^2}$$

Iz zadnje dvije jednakosti možemo zaključiti da je parametarski oblik lemniskate

$$c: \begin{cases} x = \pm \frac{a\sqrt{(1 - k^2)}}{1 + k^2} \\ y = \pm \frac{ka\sqrt{(1 - k^2)}}{1 + k^2} \\ -1 \leq k \leq 1 \end{cases}$$

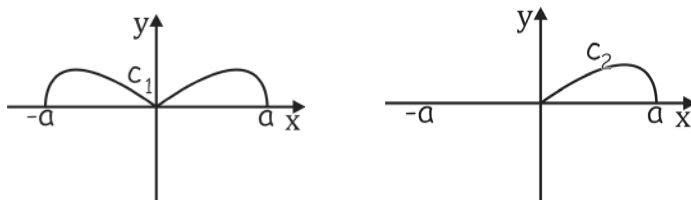
Pitanje: Zašto smo stavili

da je $k \in [-1, 1]$?

Izračunajmo dati integral:

$$\begin{aligned} \int_c |y| ds &= \left| \begin{array}{l} \text{zbog simetričnosti lemniskate} \\ \text{u odnosu na } x\text{-osu} \end{array} \right| = 2 \int_{c_1} |y| ds = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{zbog simetričnosti lemniskate} \\ \text{u odnosu na } y\text{-osu} \end{array} \right| = 2 \cdot 2 \int_{c_2} |y| ds = 4 \int_{c_2} |y| ds \end{aligned}$$

gdje je



Dalje imamo

$$x = \pm \frac{a\sqrt{1-k^2}}{1+k^2} \Rightarrow x'_k = \frac{ak(k^2-3)}{(1+k^2)^2\sqrt{1-k^2}}$$

$$y = \pm \frac{ka\sqrt{1-k^2}}{1+k^2} \Rightarrow y'_k = \frac{-a(3k^2-1)}{(1+k^2)^2\sqrt{1-k^2}}$$

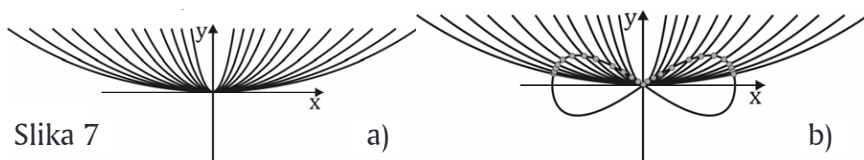
$$x_k'^2 + y_k'^2 = \frac{-a^2}{k^4-1} = \frac{a^2}{1-k^4}$$

$$\sqrt{x_k'^2 + y_k'^2} = \frac{a}{\sqrt{1-k^4}}$$

$$\begin{aligned} \int_C |y| ds &= 4 \int_{C_2} |y| ds = 4 \int_0^1 |y| \sqrt{x_k'^2 + y_k'^2} dk = 4 \int_0^1 \frac{ka\sqrt{1-k^2}}{1+k^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{1-k^2}\sqrt{1+k^2}} dk = \\ &= 4a^2 \int_0^1 \frac{k}{(1+k^2)\sqrt{1+k^2}} dk = \dots = 4a^2 \left(-\frac{1}{2}\right)(\sqrt{2}-2) = 2a^2(2-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

II način (parametrizacija pomoću parabole)

Parametrizirajmo lemniskatu uz pomoć familije parabola $y = px^2$, čiji su grafici otprilike oblika kao na slici 7.a).



za $0 \leq p < +\infty$. Ako fiksiramo p i posmatramo presjek lemniskate sa parabolom, kao rezultat imamo najviše dvije zajedničke tačke. Sad ako pustimo da p uzima vrijednosti od 0 do $+\infty$ i za svako fiksirano p nađemo presječnu tačku parabole i lemniskate, imali bismo otprilike sljedeći grafik presječnih tački: vidi sliku 7.b).

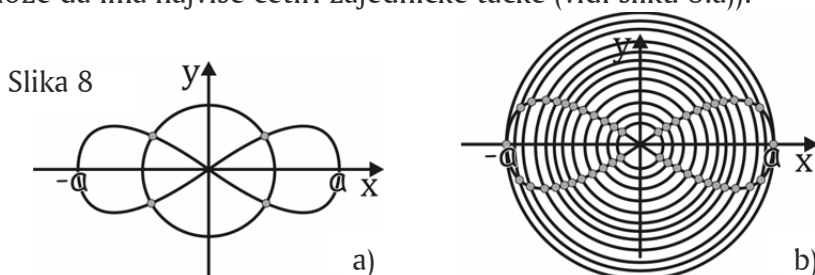
Slična priča važi i za slučaj kada posmatramo familiju $y = -px^2$ za vrijednosti $0 \leq p < \infty$.

Sad ako stavimo smjenu $y = \pm px^2$ u jednačinu lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ možemo dobiti jednačinu lemniskate u parametarskom obliku. Mi ćemo, radi složenosti, formulu izostaviti, a čitalac se upućuje da je izvede.

Isto tako, napomenimo da dobijeni parametarski oblik lemniskate na ovaj način, u našem zadatku, ne pomaže da integral izračunamo na lagan način.

III način (parametrizacija pomoću krugova)

Parametrizirajmo lemniskatu uz pomoć familije krugova. Lemniskata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ u presjeku sa nekim krugom može da ima najviše četiri zajedničke tačke (vidi sliku 8.a)).



Od ranije znamo da je jednačina kruga u parametarskom obliku sljedeća $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$. Ako pustimo da r uzima vrijednosti od 0 do a , a φ da uzima vrijednosti od 0 do 2π i za svaki dobijeni krug nađemo presječne tačke kruga i lemniskate, imali bismo otprilike grafik kao na slici 8.b).

Stavimo smjenu $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$ u jednačinu lemniskate. Imamo

$$(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 = a^2(r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi)$$

$$r^4 = a^2 r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad / : r^2$$

$$r^2 = a^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

$$r = a \sqrt{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)} = a \sqrt{\cos 2\varphi}$$

Prema tome, jednačina lemniskate u parametarskom obliku izgleda ovako

$$c: \begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \\ y = a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \end{cases}$$

Pitanje: Zašto smo stavili ograničenje za φ ?

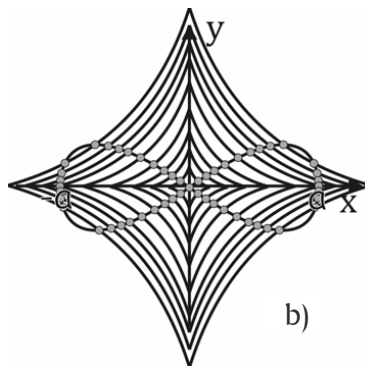
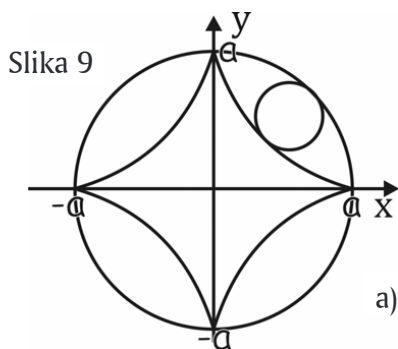
Sad imamo

$$\begin{aligned} \oint_c |y| ds &= \left| \begin{array}{l} \text{lemniskata } c \text{ je simetrična} \\ \text{u odnosu na } x \text{ i } y \text{ - osu} \end{array} \right| = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi = 2a^2(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

IV način (parametrizacija pomoću astroide)

Parametarski oblik astroide je $\begin{cases} x = p \cos^3 t \\ y = p \sin^3 t \end{cases}$. Ako posmatramo $0 \leq t \leq 2\pi$

familiju astroida u kojima parametri p i t uzimaju vrijednost $0 \leq p < \infty$ i $0 \leq t \leq 2\pi$ i napravimo presjek te familije sa lemniskatom imat ćemo grafik kao na slici 9.a).



Prema tome, lemniskatu možemo parametrizirati ako uvedemo smjene $x = p \cos^3 t$ i $y = p \sin^3 t$ u jednačinu $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Radi složenosti, parametarski oblik lemniskate dobijen na ovaj način izostavljamo. Čitalac se upućuje da pokuša izvesti datu formulu.

Isto tako, parametrizacija na ovaj način ne pomaže nam za lagano izračunavanje datog integrala.

Krivolinijski integral druge vrste vrste (po luku)

Najčešći način rješavanja krivolinijskog integrala II vrste po nekoj konturi c je parametrizacija te konture, tj. napisati jednačinu krive c u parametarskom obliku. Kao osnovne primjere parametrizacije imamo:

- jednačinu kružnice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, čiji je centar tačka $S(p, q)$ i poluprečnik $r > 0$, čiji je parametarski oblik $x = p + r \cos t \wedge y = q + r \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$;
- jednačinu elipse $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ sa poluosama $a > 0$ i $b > 0$, čiji je parametarski oblik $x = p + a \cos t \wedge y = q + b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$;
- jednačinu hiperbole $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$, čiji je parametarski oblik $x = p + \frac{a}{\cos t} \wedge y = q + b \operatorname{tg} t, t \in [-\pi, \pi], t \neq \pm \frac{\pi}{2}$; Za desnu granu ove hiperbole (tj. ako je $x > p$) možemo koristiti i parametarske jednačine određene hiperboličkim funkcijama $x = p + a \operatorname{ch} t \wedge y = q + b \operatorname{sh} t, t \in (-\infty, +\infty)$.

Primjeri 1: Izračunati krivolinijske integrale

a) $I_1 = \int (x^2 + y) dx + (y^2 + z) dy + (z^2 + x) dz$, ako je c pozitivno orijentisana kontura elipse $x^2 + y^2 = 4, x + z = 2$.

Rješenje: Iz jednačine $x^2 + y^2 = 4$ slijedi $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$,

a iz $x + z = 2$ slijedi $z = 2 - x = 2 - 2 \cos t = 2(1 - \cos t)$. Dakle,

$$x = 2 \cos t \Rightarrow dx = -2 \sin t dt$$

$$y = 2 \sin t \Rightarrow dy = 2 \cos t dt$$

$$z = 2(1 - \cos t) \Rightarrow dz = 2 \sin t dt.$$

Dobija se integral

$$I_1 = \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t + 2 \sin t)(-2 \sin t) dt + \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 t + 2 - 2 \cos t) 2 \cos t dt + \\ + \int_0^{2\pi} (4 - 8 \cos t + 4 \cos^2 t + 2 \cos t) 2 \sin t dt.$$

Nakon sređivanja podintegralnih izraza i spajanja u jedan integral dobijamo

$$I_1 = \int_0^{2\pi} (-4 + 4 \cos t + 8 \sin t - 12 \sin t \cos t + 8 \sin^2 t \cos t) dt$$

Ovaj integral se svodi na $\int_0^{2\pi} (-4) dt = -8\pi$, jer integracija po ostalim sabircima daje nulu.

b) $I_2 = \int_C 2xy dx + z^2 dy + x^2 dz$, ako je C pozitivno orijentisana kontura elipse $^c 2x^2 + 2y^2 = z^2, x + z = a, a > 0$.

Rješenje: Projekcija konture na xOy ravan daje nam jednačinu

$$2x^2 + 2y^2 = (a - x)^2 \Leftrightarrow (x + a)^2 + 2y^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \frac{(x + a)^2}{2a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Time dobijamo parametrizaciju

$$x + a = a\sqrt{2} \cos t, y = a \sin t, z = a - x = a - (a\sqrt{2} \cos t - a) = a(2 - \sqrt{2} \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Osim toga, $dx = -a\sqrt{2} \sin t dt, dy = a \cos t dt, dz = a\sqrt{2} \sin t dt$, pa je integral I_2 jednak

$$\int_0^{2\pi} [2a^2 \sin t (\sqrt{2} \cos t - 1)(-a\sqrt{2}) \sin t + a^2 (2 - \sqrt{2} \cos t)^2 a \cos t + a^2 (\sqrt{2} \cos t - 1)^2 a\sqrt{2} \sin t] dt$$

Sređivanjem izraza i rješavanjem integrala dobija se $I_2 = -2a^3 \pi \sqrt{2}$.

c) $I_3 = \int_C z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz$, ako je C pozitivno orijentisana

kriva $x^2 + y^2 = 2ax, z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, a > 0$.

Rezultat: $I_3 = -2a^2\pi$.

d) $I_4 = \int (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, ako je c gornja petlja ($z \geq 2$) krive $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, pozitivno orijentisana.

Rezultat: $I_4 = -\frac{32}{3}$.

U slučaju da je kriva c data jednačinom u implicitnom obliku $f_n(x, y) = g_{n-1}(x, y)$, gdje su f_n , odnosno g_{n-1} homogeni polinomi stepena n , odnosno $n-1$, možemo uvesti parametar t stavljajući $y = tx$, nakon čega se rješava x i y preko t .

Primjeri 2: Izračunati površinu figure u ravni koja je određena krivom

$$a) x^3 + y^3 = 3axy, a > 0 \text{ (Dekartov list)}$$

Rješenje: Ako je $y = tx$, tada je

$$x^3(1+t^3) = 3atx^2 \Rightarrow x = \frac{3at}{1+t^3} \Rightarrow y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Dakle, parametrizacijom Dekartovog lista dobijamo

parametarski oblik jednačine te krive $x = \frac{3at}{1+t^3} \wedge y = \frac{3at^2}{1+t^3}, t \geq 0$. Diferenciranjem slijedi:

$$dx = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} dt \quad dy = \frac{3a(2t-2t^4)}{(1+t^3)^2} dt.$$

Tražena površina jednaka je

$$P = \frac{1}{2} \int_c xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{3at}{1+t^3} \cdot \frac{3a(2t-2t^4)}{(1+t^3)^2} - \frac{3at^2}{1+t^3} \cdot \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \right) dt = \frac{9a^2}{2} \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2}.$$

Posljednji integral se lako riješi smjenom $1+t^3 = z$. Dobija se $P = \frac{3a^2}{2}$.

$$b) (x+y)^4 = ax^2y, a > 0.$$

Rješenje: Ako je $y = tx$, tada je

$$x^4(1+t)^4 = atx^3 \Rightarrow x = \frac{at}{(1+t)^4} \Rightarrow y = \frac{at^2}{(1+t)^4}.$$

Zato je $dx = \frac{a(1-3t)}{(1+t)^5} dt$ i $dy = \frac{a(2t-2t^2)}{(1+t)^5} dt$, pa je površina

figure jednaka

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{at}{(1+t)^4} \cdot \frac{a(2t-2t^2)}{(1+t)^5} - \frac{at^2}{(1+t)^4} \cdot \frac{a(1-3t)}{(1+t)^5} \right) dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2+t^3}{(1+t)^9} dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t)^8} dt.$$

Uzimajući smjenu $1+t=z$, slijedi:

$$P = \frac{a^2}{2} \int_1^{\infty} \frac{(z-1)^2}{z^8} dz = \frac{a^2}{2} \left(\int_1^{\infty} \frac{dz}{z^6} - 2 \int_1^{\infty} \frac{dz}{z^7} + \int_1^{\infty} \frac{dz}{z^8} \right) = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) = \frac{a^2}{210}.$$

$$\text{c) } (x+y)^{2n+1} = ax^n y^n, \quad a > 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Rezultat: } P = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{\binom{2n}{k}}{4n-k+1}.$$

$$\text{d) } x^3 + y^3 = x^2 + y^2.$$

$$\text{Rezultat: } P = \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Neke krive, kao npr. lemniskata, imaju najjednostavniju jednačinu u polarnim koordinatama. To može biti polazna osnova da tu krivu napišemo u parametarskom obliku.

Primjeri 3:

a) Izračunati integral $I = \int y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, ako je c dio tzv. Vivianijeve krive dobijene u presjeku sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) i cilindra $x^2 + y^2 = ax$, za $z \geq 0$, prolazeći u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, ako se posmatra sa pozitivnog dijela ($x > a$) ose Ox .

Rješenje: Prelazeći na polarne koordinate formulama $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$, jednačina cilindra $x^2 + y^2 = ax$ se transformiše u $r = a \cos \varphi$. Zbog poznate činjenice da je $r \geq 0$,

imamo da je $\cos \varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Jednačina sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ se transformiše u $r^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow z = \sqrt{a^2 - r^2}$ (imajući u vidu da je $z \geq 0$). Sada smo u prilici napisati jednačinu Vivianieve krive u parametarskom obliku – parametar će biti φ .

$$z = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{a^2 (1 - \cos^2 \varphi)} = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi} = a |\sin \varphi|.$$

$$x = r \cos \varphi = (a \cos \varphi) \cos \varphi = a \cos^2 \varphi;$$

$$y = r \sin \varphi = (a \cos \varphi) \sin \varphi = a \sin \varphi \cos \varphi;$$

Treba uzeti u obzir da zbog $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ veličina $\sin \varphi$ može biti i pozitivna i negativna, pa prilikom vađenja posljednjeg korijena uzimamo apsolutnu vrijednost.

Dalje slijedi:

$$dx = -2a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi,$$

$$dy = a (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi = a \cos 2\varphi d\varphi,$$

$$dz = \operatorname{sgn} \varphi \cdot a \cos \varphi d\varphi, \varphi \neq 0.$$

Uvrštavajući u polazni integral, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \cdot (-2) a \sin \varphi \cos \varphi + a^2 \sin^2 \varphi \cdot a (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + a^2 \cos^4 \varphi \cdot \operatorname{sgn} \varphi \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot a \cos \varphi \right] d\varphi \\ &= a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-2 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \sin^4 \varphi + \operatorname{sgn} \varphi \cos^5 \varphi \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Pošto je $-2 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \operatorname{sgn} \varphi \cos^5 \varphi$ neparna funkcija od φ , integral po tim sabircima je nula. Ostaje nam

$$\begin{aligned} I &= a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \sin^4 \varphi) d\varphi = a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi = a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \cos 2\varphi d\varphi \\ &= \frac{a^3}{2} \left(\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d\varphi}_0 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\varphi d\varphi \right) = -\frac{a^3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi = -\frac{a^3 \pi}{4}. \end{aligned}$$

b) Izračunati površinu figure ograničene lemniskatom

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2), \quad a > 0.$$

Rješenje: Jednačina lemniskate u polarnim koordinatama je $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (vidi sliku i izvođenje jednačine u zadatku br 1).

Desna petlja lemniskate ($x \geq 0$) se dobije za $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, a lijeva ($x \leq 0$) za $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Sada možemo kao u a) napisati parametarski oblik jednačine lemniskate, uzimajući kao parametar ugao φ :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \Rightarrow dx = a \left(-\sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} - \cos \varphi \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \right) d\varphi = -a \frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi; \\ y &= a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \Rightarrow dy = a \left(\cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} - \sin \varphi \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \right) d\varphi = a \frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi. \end{aligned}$$

Zbog simetričnosti lemniskate dovoljno je računati jednu četvrtinu njene površine, ako je $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Dakle,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} P &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[a \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \cdot a \frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} - a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \left(-a \frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \right) \right] d\varphi \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos \varphi \cos 3\varphi + \sin \varphi \sin 3\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

Otuda je tražena površina $P = a^2$.

Parametarski oblik jednačine lemniskate može se dobiti i

uvrštavanjem $y = x \operatorname{tg} t$ u jednačinu $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Dobijase identična forma $x = a \cos t \sqrt{\cos 2t}$, $y = a \sin t \sqrt{\cos 2t}$.

c) Izračunati $I = \int_c (x + y) dx - (x - y) dy$, ako je c petlja krive $r = a \cos 3\varphi$, $a > 0$, od tačke $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ do tačke $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Rezultat: $I = -\frac{a^2 \pi}{3}$.

Literatura

1. D. Adnađević, Z. Kadelburg, *Matematička analiza II*, V izdanje, Matematički fakultet, str. 179-220, 2008.
2. T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, second edition, Addison-Wesley, str. 140-174, 2004.
3. N. Miličić, M. Obradović, *Zbirka zadataka iz više matematike*, Akademska misao, str. 15-25, 2005.
4. T. Pejović, *Matematička analiza IV*, IV izdanje, Građevinska knjiga, str. 1-32, 1965.