

Dževad Burgić
Fatih Destović
Naida Bikić

PROBLEMSKI ZADACI U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Sažetak

Problemski zadaci su sastavni dio matematičkih nastavnih sadržaja kroz čije rješavanje se matematička znanja brže i lakše usvajaju, upotpunjuju i produbljuju, jer tako učenici razvijaju misaone i stvaralačke sposobnosti, provjerava se nivo matematičkog znanja i vještina i primjenjuju usvojena matematička znanja. Problemski matematički zadaci su tekstualni zadaci u kojima učenik treba razumjeti zadatak-tekst, matematički korektno zapisati zadani problem i riješiti (ponekad i odgovoriti). Osnovne elemente svakog problemskog zadatka čine uvjet (uvjeti), tj. ono što je poznato ili zadano i pitanje (odgovor), tj. ono što je nepoznato ili traženo. U uvjetu zadatka ukazuje se na vezu između danih podataka, a također i na vezu između danih i traženih podataka. Ta veza određuje i izbor aritmetičkih operacija koja će učestvovati u izradi zadatka. Pitanje ukazuje na to šta se traži u zadatku, što je nepoznato. Zavisno od sadržaja zadatka zahtjevi se najčešće izražavaju riječima: koliko, kako, izradi, nađi, odredi, ispitaj, pokaži, da li važi, kada je itd. Da bi djeca uspješno realizirala sadržaje, ciljeve i zadatke nastave matematike, potrebno je da se konstantno susreću sa izradom matematičkih zadataka različitih tipova.

Ključne riječi: problemski zadaci, matematička znanja, učenici, nastavnici

Summary

Problem tasks are the component part of mathematical course contents through whose solve the mathematical knowledge faster and more easily adopt, complete and deepen, because so students develop thoughtful and creative abilities, check the level of mathematical knowledge and skills and apply are adopted the mathematical knowledge. Problem mathematical tasks are textual tasks in which student need will understand each other the task-text, mathematical correctly note the default storage problem and sometimes will get rid of (and answer). Essential elements everyone problem task make the condition (conditions), i.e. it which is known or is given and asking (the answer), i.e. it which is anonymously or is requested. In the condition of task indicates on the relation between given data, and also and on the relation between given and required data. That relation determines and the choice of arithmetic operations which will participate in the creation of task. Question points out that what requests in the task, which is anonymously. Depending on of contents of task, requests most frequently verbalise: how, how, makes, find, squads, test, show, does apply, when is, etc. In order to children successfully would become realized contents, goals and tasks continue the mathematics, needfully is that constantly meet with the creation of mathematical tasks of different types.

Key words: problem tasks, mathematical knowledge, students, teachers

UVOD

U životu čovjeka nema ni jedne aktivnosti koja nema osnovu, svrhu ili smisao što nisu povezani s matematikom. Nedovoljna osviještenost porodičnog okruženja o tome prvi je nemotivacijski faktor u stjecanju matematičkih kompetencija učenika.

Kako aktivirati učenike na časovima matematike, kako organizirati nastavu, koja nastavna sredstva koristiti itd. – pitanja su koja muče sve nastavnike što realiziraju nastavu matematike u osnovnim i srednjim školama. Jedan od odgovora je „preporuka“ koju je dalo *Državno američko vijeće nastavnika matematike* 1989. godine, a ona glasi:

- *predavanja* nastave matematike trebalo bi da navode učenika ka „pronalaženju rješenja“,
- *istraživanje* (nalaženje) formula, njihova objašnjavanja, primjena itd.
- *formulacija* pretpostavki za uspješnu realizaciju nastave.

Ukoliko treba podijeliti nastavu prema aktivnostima učenika, onda bi ta podjela imala sljedeće oblike:

- *predavanje* – zadatak učenika je da zapamte izložene informacije,
- *objašnjavanje* – aktivnost učenika je nešto veće, ali se ipak svodi na percepciju,
- *istraživanje* – učenička aktivnost je stvaralačka.

Naravno, intelektualnom razvoju učenika najviše doprinosi istraživački tip nastave. Takvom nastavom se razvija učeničko stvaralačko mišljenje, a to je glavni cilj učenja putem rješavanja problemskih zadataka u nastavi matematike.

ZNAČAJ PROBLEMSKIH ZADATAKA U NASTAVI MATEMATIKE

Problemski zadaci se mogu uspješno primjenjivati u svim nastavnim oblastima kod učenika svih uzrasta. Ova nastava se planira u godišnjem planu svakog nastavnika. S pedagoško-psihološkog i didaktičko-metodičkog aspekta veliki je značaj primjene problemskih zadataka. Didaktičke vrijednosti koje su od posebnog značaja su: povećana efikasnost odgojno-obrazovnog rada, ubrzan razvoj mentalnih sposobnosti i psihičkih funkcija, osiguranje metode aktivnog učenje, razvijanje apstraktnog mišljenja, pojačana je motivacija. Također, pospješuje se razvijanje misaonih operacija: analize, sinteze, apstrakcije, generalizacije, indukcije, dedukcije i omogućava se

stvaralaštvo učenika, poboljšava trajnost znanja, njeguje se ustrajnost i upornost, učenici se osposobljavaju za samostalan rad, njeguje se kritičnost, fleksibilnost i kreativnost, jača samopouzdanje u vlastite snage, povećana je primjenjivost stečenih znanja.

Rješavanje problemskih zadataka podrazumijeva sljedeće aktivnosti učenika:

- *problemску situaciju,*
- *aktivnost učenika,*
- *situaciju cilja.*

Mogućnosti primjene problemske nastave zavise od uzrasta učenika, stepena psihičkog razvoja, emocionalnog stanja, motivacije, brojem informacija kojima učenik raspolaže, načina na koji su se stjecala znanja, te opredjeljenja samog nastavnika da postavlja i zajedno sa učenicima analizira i rješava problemske zadatke.

Problemški matematički zadaci su zadaci u kojima se podaci i odnosi među njima najčešće formuliraju tekstualno, a koje treba matematički oblikovati i zatim odgovarajućom računskom operacijom izračunati nepoznati – traženi podatak.

Zapisivanjem tekstualnih problemskih zadataka u obliku matematičkih izraza, jednačina i drugih zapisa, učenici uočavaju mogućnost prikazivanja raznih, po sadržaju različitih zadataka istim simbolima, što doprinosi shvatanju univerzalnosti matematike. Zbog toga u nastavi matematike postoji trajan zahtjev da se svaki odgovor formuliра jasno, precizno i koncizno, što razvija jezičke i izražajne sposobnosti kod učenika, koje su značajne u odgojno – obrazovnom procesu.

Rješavanjem tekstualnih problemskih zadataka, pored usvajanja matematičkih, razvijaju se misaone sposobnosti, jača volja, nalaze se motivi za nove napore, razvija se istrajnost, upornost i druge pozitivne osobine ličnosti samog učenika.

Svrha problemskih matematičkih zadataka u nastavi je da povezuju stvarni život i matematiku, da motiviraju djecu i da učine učenje matematike lakšim.

Problemske matematičke zadatke mogu rješavati već djeca predškolske dobi, iako su im oni teški. Međutim, oni su teški djeci svih uzrasta. Neki autori (Vlahović, Štetić i sur.) smatraju da je uzrok poteškoća u rješavanju tih zadataka preveliki naglasak na poučavanje djece apstraktnim i proceduralnim znanjima u školama, što dovodi do toga da dijete brzopleto rješava zadatak ne obraćajući pažnju

na njegovu strukturu. Naravno da postoji još uzroka poteškoćama u rješavanju problemskih matematičkih zadataka koji se odnose na karakteristike zadataka. U svrhu razumijevanja i istraživanja tih uzroka važno je klasificirati problemske zadatke.

VRSTE PROBLEMSKIH ZADATAKA

Svi problemski zadaci opisuju neke količine i veze među njima. U svakom zadatku date su tri informacije; dvije su poznate, odnosno poznata je njihova brojčana vrijednost, a jedna je nepoznata i treba je izračunati.

Dva su kriterija klasifikacije problemskih matematičkih zadataka. Prvi je semantički odnos koji se odnosi na konceptualno znanje o povećanju, smanjenju, kombiniranju i usporedbi količina definiranih u zadatku. Na osnovu ovog kriterija razlikujemo tri vrste zadataka:

- *zadatke promjene,*
- *zadatke kombiniranja i*
- *zadatke poređenja.*

Unutar ove tri glavne skupine problemskih zadataka postoje dodatne podjele s obzirom na položaj nepoznate količine. Dakle, položaj nepoznate količine čini drugi kriterij klasifikacije.

Primjeri: “Klasifikacija problemskih matematičkih zadataka zbrajanja i oduzimanja”

Kombiniranje

Ivan ima 3 sličice, a Enes ima 5 sličica. Koliko sličica imaju zajedno? – unija skupova.

Ivan ima 3 sličice. Enes ima nekoliko sličica. Zajedno imaju 8 sličica. Koliko sličica ima Enes? – podskup.

Ivan ima nekoliko sličica, a Enes ima 5 sličica. Oni imaju zajedno 8 sličica. Koliko sličica ima Ivan? – podskup.

Promjena

Ivan je imao 3 sličice, a onda mu je Enes dao 5 sličica. Koliko sličica ima Ivan sada? – završni skup uvećanje.

Ivan je imao 8 sličica, a onda je Enesu dao 5 sličica. Koliko sličica ima Ivan sada? – završni skup umanjeње.

Ivan je imao 3 sličica. Onda mu je Enes dao nekoliko sličica. Sada Ivan ima 8 sličica. Koliko mu je sličica dao Enes? – mijenjajući skup uvećanje.

Ivan je imao 8 sličica, a onda je dao nekoliko sličica Enesu. Sada Ivan ima 3 sličice. Koliko je Ivan sličica dao Enesu? – mijenjajući skup umanjeње.

Ivan je imao nekoliko sličica. Onda mu je Enes dao 5 sličica. Sada Ivan ima 8 sličica. Koliko je sličica Ivan imao u početku? – početni skup uvećanje.

Ivan je imao nekoliko sličica. Onda je dao 5 sličica Enesu. Sad Ivan ima 3 sličice. Koliko je sličica Ivan imao u početku? – početni skup umanjeње.

Poređenje

Ivan ima 8 sličica, a Enes ima 5 sličica. Koliko sličica više ima Ivan od Enesa? – razlika skupova više.

Ivan ima 8 sličica. Enes ima 5 sličica. Koliko sličica manje ima Enes od Ivana? – razlika skupova manje.

Ivan ima 3 sličice, a Enes ima 5 sličica više od Ivana. Koliko sličica ima Enes? – poređenje skupova - više.

Ivan ima 8 sličica. Enes ima 5 sličica manje od Ivana. Koliko sličica ima Enes? – poređenje skupova – manje.

Ivan ima 8 sličica. On ima 5 sličica više od Enesa. Koliko sličica ima Enes? – referentni skup – više.

Ivan ima 3 sličice. On ima 5 sličica manje od Enesa. Koliko sličica ima Enes? – referentni skup – manje.

USPJEŠNOST RJEŠAVANJA PROBLEMSKIH MATEMATIČKIH ZADATAKA

Istraživanja su pokazala da su zadaci poređenja najteži problemski zadaci, dok su za zadatke kombiniranja i zadatke promjene rezultati istraživanja nejednoznačni. Neka istraživanja pokazuju da su zadaci promjene i zadaci kombiniranja podjednako teški.

Riley i Greeno (1988) su proveli istraživanje o uspješnosti rješavanja svih 18 problemskih zadataka. Sudionici su bili djeca

predškolskog uzrasta i učenici prvog, drugog i trećeg razreda osnovne škole. Dobiveno je da su na svim uzrastima najlakši zadaci promjene (uspješno riješenih zadataka je oko 80%), da su zadaci kombiniranja teži na svim uzrastima (uspješno riješenih zadataka je oko 75%), dok su zadaci poređenja najteži (uspješno riješenih zadataka je oko 70%).

Rješavanje problema može biti proces primjene postojećeg znanja na nove i neobične situacije u svrhu stjecanja novog znanja. Na taj način rješavanje problemskih zadataka postaje neka vrsta istraživačkog učenja.

MODELI RJEŠAVANJA PROBLEMSKIH MATEMATIČKIH ZADATAKA

Svi modeli rješavanja problemskih zadataka polaze od činjenice da se dječiji rad u rješavanju problemskih matematičkih zadataka poboljšava tokom kognitivnog razvoja. Većina modela koji objašnjavaju rješavanje tih zadataka polazi od Piagetove teorije kognitivnog razvoja učenika-djeteta.

Ono što razlikuje modele za rješavanje problemskih zadataka su njihove pretpostavke o tome što je presudno za uspješno rješavanje problemskih matematičkih zadataka. Matematičko-logički modeli smatraju da su to konceptualna matematička znanja, dok lingvistički modeli smatraju da je to razumijevanje teksta zadatka.

Šta je "stvarni problem" kod rješavanja ovih zadataka predstavlja problem i među stručnjacima, tj. nema jedinstvenog mišljenja. Međutim, ono što karakterizira svaki problem to je postojanje neke teškoće, neke prepreke. "Tamo gdje se može doći do cilja lako, nema problema", ističe M. Stevanović (Stevanović, 2000:143).

Polazeći sa stanovišta didaktike i psihologije, razlike između problema i problemske situacije postoje i na njih ukazuje M. Stevanović, navodeći: "Problemska situacija predstavlja početnu kariku u rješavanju shvaćenog i prihvaćenog problema i kao takva ona je doživljaj neizvjesnosti, očekivanja, zbunjenosti, radoznalosti i tenzije." (Stevanović, 2000:145).

Smisao problemske nastave jeste da motivira učenike za rješavanje problema. Razlog nastajanja problemske situacije je izvjesna protivrječnost koja je sadržana u problemu. Kod učenika se pobuđuje interesiranje i želja da se dođe do ukidanja protivrječnosti (rješavanjem zadanog problema). O prirodi problema i problemske

situacije M. Stevanović ističe: “Stavivši učenike pred problem znači dati mu izvjesne podatke i postaviti mu određeni cilj koji on ima, koristeći te podatke, i samo njih, da postigne. Staviti ili dovesti učenika u problemsku situaciju, znači omogućiti mu da “vidi” neke relacije, a prepustiti njemu samom da postavlja ciljeve, tj. određene probleme” (Stevanović, 2000:150).

Rješavanje problema predstavlja niz složenih intelektualnih operacija. U fazi rješavanja problema učenici su usmjereni na traženje puteva koji vode do rješenja problema. Izbor metoda kojima ćemo riješiti problem zavisi od nivoa znanja i umijeća učenika. Posebno na uzrastu IV i V razreda osnovne škole, kada učenici još nisu navikli na “nestandardan” način rada. Najbolje je koristiti heuristički oblik dijaloga, gdje učitelj na osnovu heurističkih pitanja mobilizira učenike za otkrivanje podataka neophodnih za rješavanje problema.

Problematski čas ima sljedeće faze:

- stvaranje problemske situacije i formuliranje problema,
- formiranje hipoteze,
- dekompozicija problema,
- rješavanje problema,
- analiza rezultata, izvođenje zaključaka, generalizacija i
- praktična primjena novih znanja pri rješavanju specijalno odabranih zadataka.

PROBLEMSKI ZADACI OD I DO V RAZREDA

Problematski zadaci, kao što je već rečeno, mogu se koristiti pri obradi novih nastavnih sadržaja, a posebno se preporučuju za časove utvrđivanja, ponavljanja i vježbanja. Kad se problematski zadatak koristi u obradi nastavnih sadržaja, onda učenici usvajanju činjenice i ponašaju se poput naučnog istraživača, istražuju i otkrivaju, i u tom procesu zastupljene su sve misaone aktivnosti. Učenici stječu znanja na vrlo kreativan način uz stalnu kritičku procjenu datih činjenica.

U problemskoj situaciji postoje suprotnosti između:

- datog i zadanog,
- eksplicitnog i implicitnog,
- poznatog i nepoznatog i
- starog i novog.

U početnoj situaciji su zadani osnovni podaci, ali se na osnovu njih moraju pronaći novi. Učenici se u ovoj fazi nailaze pred teškoćom. Tada se prizivaju u pomoć prethodno znanje i iskustvo. Učenik i/ili nastavnik su aktivni u nalaženju matematičkog modela pomoću kojeg treba riješiti postavljeni problem. Rješavanje problema podrazumijeva aktivnost u sljedećoj trijadi: problemska situacija, aktivnost učenika i nastavnika (po potrebi) i situacija cilja.

I razred – Oduzimanje broja 1

Motivacijski razgovor – donosimo korpu sa kruškama (5 krušaka) i dijelimo učenicima – razgovor – Koliko je krušaka bilo? Koliko smo dali Alenu? Koliko smo dali krušaka Mireli?

Koliko je ostalo krušaka? Koliko je krušaka pojela Dina? Koliko je krušaka ostalo?

Npr. neka je nastavna jedinica *Oduzimanje brojem jedan*. U tu svrhu vršimo određene pripremne radnje na času koje će doprinijeti boljem razumijevanju nastavne jedinice.

a) Usmeno ponavljamo dodavanje broja jedan. Pokazujemo učenicima košaricu s pet jabuka i tražimo da ih prebroje. Iz košarice izvadimo jednu jabuku i govorimo: U košarici je bilo pet jabuka, jednu sam izvadila. Koliko je jabuka ostalo u košarici? Znači, pet manje jedan je četiri. Postupak ponavljamo dok u košarici ne ostane samo jedna jabuka.

b) Zatim zahtijevamo da učenici na klupu slože npr. 4 knjige. Pitamo: Koliko knjiga si složila/složio na klupi? Zatim im govorimo da jednu knjigu stave ispod klupe i pitamo koliko im je knjiga ostalo na klupi. Znači, koliko je četiri manje jedan? Postupak ponavljamo dok im na klupi ne ostane jedna knjiga.

c) Na ploči crtamo pet cvjetića (učenici rade paralelno sa nastavnikom). Pitamo: Koliko je cvjetića nacrtano? Jedan ćemo cvjetić precrtati. Koliko ih je ostalo neprecrtanih? Kako bismo to mogli zapisati? Zapisujemo: 5 MANJE 1 je 4. Postupak ponavljamo s 3 nacrtana bombona, zatim s 2 nacrtana lista.

Sinteza: Što smo danas naučili?

Uvježbavanje i ponavljanje

Pomoću sličica učenici ponavljaju motivacijsku priču. (U zdjeli je bilo 5 krušaka, Alen je pojeo jednu i ostale su četiri jer je 5 MANJE 1 jednako 4, itd. Zatim smo Igoru dali jednu i ostale su tri kruške jer je 4 MANJE 1 jednako 3, itd.)

II razred – Grupisanje sabiraka Stvaranje problemske situacije

Napomena: Učenici su osobine združenog sabiranja već upoznali. Sada ga treba ponovo otkriti i generalizirati uvođenjem slova. Budući da to ponovno otkrivanje ima veliki pedagoški značaj, učenicima ne treba reći šta je cilj našeg časa i time sugerirati ono do čega treba sami da dođu.

Nastavnik: Sada ćemo riješiti dva zadatka i vidjeti da li mogu da se riješe na više načina. Napišite tekst prvog zadatka:

Zadatak 1. Na Mirsadovom rođendanu je bilo 15 gostiju. Malo kasnije došla je grupa u kojoj je bilo 7 dječaka i djevojčica, a odmah poslije njih grupa od 5 drugara. Odgovorite koliko je ukupno bilo gostiju na Mirsadovom rođendanu?

Rad učenika: Svaki od učenika će izračunati da je na Mirsadovom rođendanu bilo 27 gostiju. Neki od učenika će saopćiti da su rezultate dobili računajući $15 + 7 = 22$, a zatim $22 + 5 = 27$. Drugi su broju gostiju koji su se nalazili kod Mirsada dodali zbir onih koji su dolazili, tj. na 15 su dodali $7 + 5 = 12$.

Nastavnik: Rezultati su vam uglavnom tačni. Dobili ste ih računajući na dva načina. Ja ću te načine napisati na tabli, a vi u vašim sveskama.

I način

$$(15 + 7) + 5 = 27$$

Odgovor: 27

II način

$$15 + (7 + 5) = 27$$

Odgovor: 27

Zadatak 2. Na izletu je bilo odjeljenje II₁ sa svojih 30 učenika. Kasnije su im se pridružila odjeljenja II₂ sa svojih 29 učenika i II₃ sa 22 učenika. Koliko je ukupno učenika bilo na izletu?

Rad učenika: Slično kao i u prethodnom zadatku učenici će izračunati da je na izletu bio 81 učenik.

Nastavnik: Kao i maloprije, ovaj rezultat ste uglavnom dobili na dva načina. Napisat ću ih na tabli:

I način
 $(30 + 29) + 22 = 81$
 Odgovor: 81

II način
 $30 + (29 + 22) = 81$
 Odgovor: 81

Nastavnik: Pogledajmo sada ponovo 1. zadatak. Koliko je Mirsad imao gostiju na svom rođendanu kada smo računali na prvi način, a koliko kada smo računali na drugi način?

Učenici: Računajući na prvi ili drugi način uvijek se dobija 27 gostiju.

Nastavnik: Pogledajte sada drugi zadatak. Koliko učenika je bilo na izletu kada smo računali na prvi, a koliko kada smo računali na drugi način?

Učenici: Računajući na prvi ili drugi način dobija se da je na izletu bio 81 učenik.

Nastavnik: Ima li, ipak, neke razlike u ovome što smo napisali na lijevoj strani – učitelj pokazuje na izraze $(15 + 7) + 5$ i $(30 + 29) + 22$, i u ovome na desnoj strani – ponovo pokazuje na izraze dobijene na II način.

Učenici: Ima, različiti su im zapisi. Zagrade nisu na istim mjestima.

Napomena: Za različite odgovore nastavnik treba da uobliči jedan odgovor, formuliran na gornji način.

Formuliranje problema

Nastavnik: Vidjeli smo, dakle, da su zapisi izraza na lijevoj i desnoj strani u zadacima različiti, ali njihove vrijednosti su iste.

Problem: Kakav zaključak možemo izvesti iz te činjenice?

Hipoteze

Napomena: Učenici će davati različite odgovore (hipoteze) ili će šutjeti. Može se na primjer čuti:

- izrazi su različiti,
- vrijednosti izraza su jednake,
- svejedno je da li računamo na prvi ili drugi način itd.

Najracionalnija hipoteza koju pred učenike treba postaviti, ukoliko sami ne dođu do nje, jeste: *Izraz dobijen na prvi način rješavanja zadatka ima istu vrijednost (jednaki rezultati) kao i izraz dobijen na drugi način rješavanja (ukazuje se na izraze napisane ranije na tabli).*

Dekompozicija problema i njegovo rješavanje

Nastavnik: Sjetite se osobine sabiranja koja se zvala *Zamjena mjesta sabiraka*. Tamo smo pisali $3 + 2 = 2 + 3$.

Nastavnik: (potproblem 1.) Kakvi su zapisi izraza s lijeve i desne strane jednakosti?

Učenici: Različiti.

Nastavnik: (potproblem 2.) Kakve su vrijednosti tih izraza?

Učenici: Jednake.

Nastavnik: Znači i u našim zadacima možemo pisati:

$$(15 + 7) + 5 = 15 + (7 + 5) \quad (1)$$

$$(30 + 29) + 32 = 30 + (29 + 32) \quad (2)$$

Da li se slažete?

Učenici: Da.

Analiza rezultata, izvođenje zaključaka i generalizacija

Nastavnik i učenici zajedno: Izraz $(15+7)+5$ može se drugačije izračunati kao izraz $15+(7+5)$.

Slično izraz $(30 + 29) + 32$ može se drugačije izračunati kao $30 + (29 + 32)$. To je druga osobina sabiranja i zove se *g r u p i s a n j e* ili *z d r u Ź i v a n j e s a b i r a k a*.

Pogledajmo prvu jednakost. Na lijevoj strani smo grupisali sabirke 15 i 7 i na njihov zbir dodali 5. Na desnoj smo na sabirak 15 dodali zbir grupisanih sabiraka 7 i 5. Da li se prilikom združivanja sabiraka mijenja zbir?

Učenici: Ne.

Nastavnik: Provjeroimo ovo na nekoliko primjera:

$$(38 + 107) + 225 = 38 + (107 + 225)$$

$$(0 + 380) + 125 = 0 + (380 + 125)$$

$$(386 + 28) + 4 = 386 + (28 + 4)$$

Napomena: Slijedi samostalan rad učenika i provjera.

Nastavnik: Uopće za bilo koja tri prirodna broja a, b, c zbir

$(a + b) + c$ "jednak je" $a + (b + c)$. Kako možemo ovo da napišemo?

Učenici: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Nastavnik: Kako se zove ova osobina?

Učenici: Grupisanje sabiraka.

Nastavnik: Umjesto zapisa $a + (b + c)$, odnosno $(a + b) + c$ može se pisati $a + b + c$, tj.

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

III razred – Dijeljenje brojem 2

Povezujemo množenje i dijeljenje u rješavanju zadataka

Ako 2 vrapca podijele 12 mrvica, koliko će svaki od njih pojesti?

Rješenje: $12 : 2 = 6$ Kako znamo? Hajde da podijelimo. Kako ćemo provjeriti? Brojimo 2, 4, 6, 8, 10 i 12.

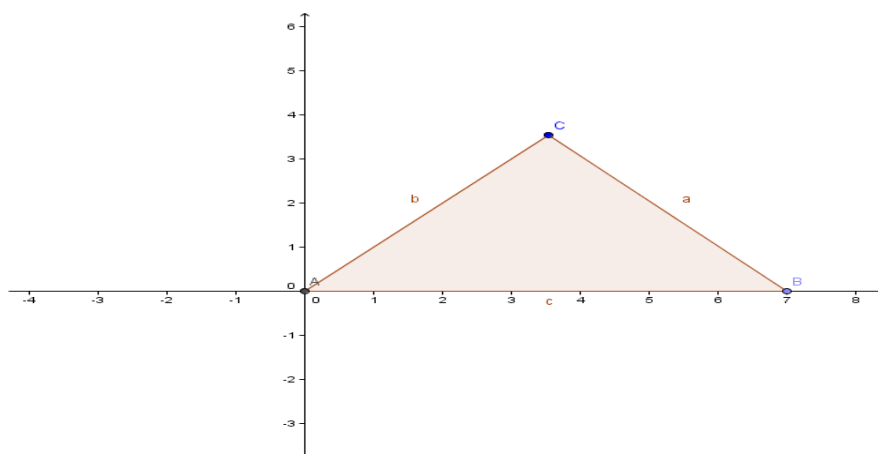
Odgovor: Vrapci će pojesti po 6 mrvica. Provjeravamo $6 \cdot 2 = 12$.

Obim trougla

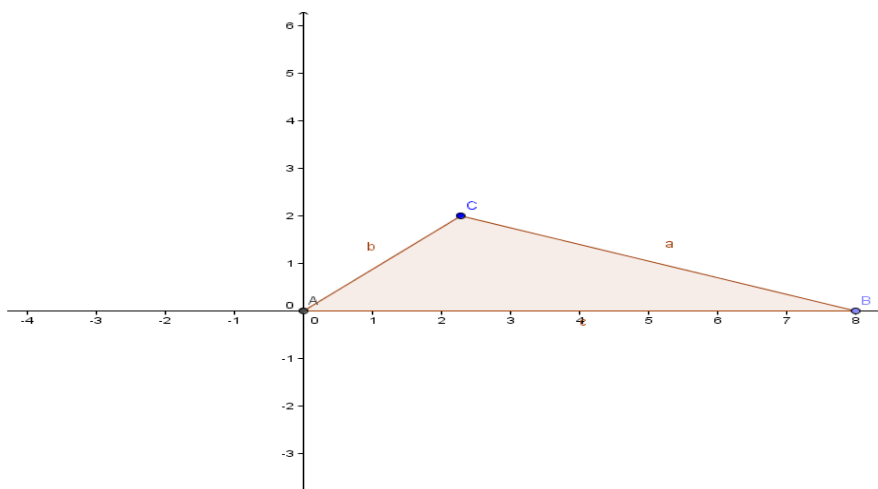
Učenici III i IV razreda rade **obim trougla**. Ukoliko se od učenika traži da izračunaju obim trougla datog na slici, oni će to odmah izračunati. Međutim, ako se cijelom odjeljenju da zadatak sa sljedećom formulacijom: Nacrtaj sve trouglove obima 17 cm, tada bi pored znanja do izražaja došle i individualne sposobnosti, inicijativa i samostalnost. Svaki učenik bi prema svojim sposobnostima našao tri stranice čiji je zbir 17 i pokušao da nacrtatrouglove. Neko će pronaći jedan, neko dvije, a neko sve moguće varijante. Crtajući eksperimentalno, najспособniji učenici će uočiti da trougao može da se nacrtat samo ako najduža stranica nije duža od 8 cm i ako je zbir svake dvije veći od treće.

Rješavajući postavljeni zadatak, učenici su na dobrom putu da otkriju važno svojstvo trougla:

Zbir svake dvije stranice trougla veći je od treće.



$$O = 5\text{cm} + 5\text{cm} + 7\text{cm} = 17\text{cm}$$



$$O = 3\text{cm} + 6\text{cm} + 8\text{cm} = 17\text{cm}$$

Stalnost razlike

Primjer 1. Djed ima 76 godina, a unuk 9. Koliko je djed stariji od unuka sada, a koliko je bio prije 6 godina? Imajući u vidu stalnost razlike koju su učenici naučili na prošlim časovima, učenici će odmah izračunati koliko je djed sada stariji, a koliko je bio prije 6 godina. Nastavnik učenike vodi do rješenja i zaključka da je djed isto bio stariji prije 6 godina, kao i sada.

$$76 - 9 = (76 + 1) - (9 + 1) = 77 - 10 = 67 \text{ sada,}$$

$$76 - 9 = (76 - 6) - (9 - 6) = 70 - 3 = 67 \text{ prije 6 godina.}$$

Primjer 2. Maja, Sandra i Amira sakupljaju razglednice. Maja ima 25 razglednica. Sandra ima duplo više nego Maja, a Amira 5 puta manje nego Sandra. Izračunaj koliko razglednica ima Maja, koliko Sandra, a koliko Amira.

Dijelimo razglednice Maji, Sandri i Amiri kad čitamo zadatak.

One broje svoje razglednice, a učenici daju prijedloge za rješavanje zadatka.

Prvo ćemo ustanoviti da Maja ima 25 razglednica.

Sandra ima duplo više. Koliko je to? Kako zapisujemo računski? $25 \text{ puta } 2$. Koliko je to?

Znamo da Sandra ima 50.

Amira ima 5 puta manje nego Maja (prijedlozi učenika za rješenje). Računamo $50 : 5 = 10$

Provjeravamo sa djevojčicama i uvjerimo se kako smo riješili zadatak, Maja prva broji i govori koliko ima, zatim Sandra i Amira.

Šta još možemo izračunati? Koliko imaju Maja i Sandra. Koliko razglednica imaju sve tri djevojčice? Koliko imaju zajedno Maja i Amira? Koliko Maja ima više od Amire? Koliko Amira ima manje od Sandre? ... Učenici govore mogućnosti zadatka.

V razred – Sastavljanje jednačina

Primjer 1. Sabina je dobila nekoliko gumica za kosu od mame. Tata joj je dao 9. Kada je sestri dala 6 ostalo joj je 11 gumica za kosu. Koliko je gumica Sabina dobila od mame?

Odgovarajući brojevni izraz je:

$$x + 9 - 6 = 11.$$

Primjer 2. Sabina je od mame dobila 8 gumica za kosu i tata joj je dao nekoliko. Kada je sestri dala 6, ostalo joj je 11 gumica za kosu. Koliko je gumica za kosu dobila od tate?

Odgovarajući brojevni izraz je:

$$8 + x - 6 = 11.$$

Početne primjere za rješavanje korištenjem jednačina biramo tako da predstavljaju suprotne zadatke od zadataka rješavanih formiranjem brojevnog izraza.

PRAĆENJE UČENIČKOG ZNANJA KROZ PROBLEMSKU NASTAVU MATEMATIKE

Praćenje učenikova učenja u početnoj nastavi matematike trajan je i kontinuiran proces stjecanja uvida u tok učenja pojedinih učenika. Glavna mu je svrha otkrivati neuspjeh u učenju kako bi ga mogli na vrijeme suzbijati.

Dva su standardna načina praćenja učenikova učenja – usmeno i pismeno ispitivanje. Iako oba omogućuju uvid u učeničko učenje, ipak se znatno širi i potpuniji uvid stječe pismenim ispitivanjem koje je objektivnije, ekonomičnije i za sve učenike jednako. Rezultati pismenih ispitivanja pouzdana su osnovica za procjenu učenikova napredovanja u učenju.

Praćenje učenikova znanja kroz problemsku nastavu matematike se odvija više usmeno u toku obrade i vježbanja nastavnih sadržaja, međutim, procjenjivanje usvojenih matematičkih sadržaja obavezno pismenim putem. Tek kada dobijemo pismenu povratnu informaciju - neposredno imamo uvid u količinu i kvalitetu učeničkog znanja.

Kvalitativna analiza rezultata (šta učenici znaju, a šta ne znaju) također je vrlo važna. Utvrdi li se tom analizom da učenici nisu usvojili pojedine dijelove gradiva, ili pak cijelo gradivo, mora se nešto poduzeti: ponovo objasniti gradivo, ili vježbati i ponavljati neusvojeno gradivo ili organizirati dopunsku nastavu. “Ako kvalitativna analiza pokaže da je gradivo usvojeno, da je većina učenika tačno riješila pojedine zadatke, opravdano se može zaključiti da je to gradivo savladano i da se u učenju može ići dalje.” (Arslanagić, 2004).

ZAKLJUČAK

Problemska situacija se stvara na početku časa i treba da bude atraktivna i privlačna, da motivira učenike na razmišljanje i aktivnost. Problem koji se iznosi pred učenike mora biti primjeren uzrastu učenika. Treba voditi računa o zahtjevima koji se postavljaju pred učenike i o mogućnostima da oni odgovore na te zahtjeve. Pod mogućnostima učenika podrazumijevat ćemo stepen psihičkog razvoja, prethodno znanje i iskustvo koje učenici posjeduju u vezi sa oblašću koja se obrađuje kao i motivaciju za rješavanje problema. Teškoća kojom se karakterizira problem i problemska situacija ne

smije kod učenika da ostavi utisak nerješivosti. Učenici tada gube volju da traže put njegovog rješavanja i pribjegavaju traženju lakših puteva (npr. prepisivanje), što razvija loše navike.

Iako najidealnije izgleda kada se zahtjevi podudare sa mogućnostima, ipak u ovakvoj situaciji se ne angažira mišljenje na najbolji način. Učenici nisu u dovoljnoj mjeri aktivni, budući da u rješavanju problema mogu da primijene i izvjesne šeme dolaska do rješenja.

Najbolje je kada su zahtjevi nešto malo iznad učenikovih mogućnosti. U takvim slučajevima učenici, zbog izvjesnih nepoznatih situacija, nisu u stanju da primijene od ranije poznate šeme. Uočavaju nove veze i odnose, analiziraju situacije i traže nove, do tada nepoznate, puteve dolaska do rješenja. Ovo pogoduje intelektualnom razvitku učenika i vuče naprijed. Učenici će biti u stanju da samostalno riješe iako se on samo djelimično oslanja na prethodna znanja i iskustva. To iskustvo i znanje treba koristiti tako da ne vodi direktno ka rješenju, već olakšava uočavanje novih do tada nepoznatih puteva dolaska do rješenja.

Za obradu nastavne jedinice problemskim putem potrebno je više vremena nego primjenom drugih didaktičkih sistema. Zato je potrebno da se nastavnici “dobro” pripreme za problemski čas, što će znatno utjecati na ekonomičnost nastave. Bez obzira na sporiji tok časa nastavnik treba da pruži mogućnost svakom učeniku da se iskaže, da ukaže na svoje puteve u rješavanju problema. Svi ti pokušaji, iako često ne vode do rješenja, predstavljaju za svakog učenika misaoni napor koji pozitivno utječe na razvijanje mišljenja. Budući da se svaki problem odlikuje teškoćom, učenici moraju biti uporni pri njegovom rješavanju.

Da bi se došlo do rješenja problema, učenici moraju uvidjeti veze i odnose među činjenicama, što će dovesti do razvijanja svih vrsta mišljenja. Učenike treba učiti da se oslobađaju šablona u mišljenju. Kod učenika treba razvijati sposobnost da u rješavanju problema nalaze različite i nove puteve (Matematika, 2002).

Prilikom izbora zadataka mora se stalno imati na umu da svaki zadatak treba imati cilj i svrhu. On treba da bude karika u dobro osmišljenom sistemu zadataka za određenu nastavnu jedinicu (Marković, 2002).

U problemskoj nastavi prvenstveno moraju biti zastupljeni zadaci čije rješavanje doprinosi dubljem razumijevanju i trajnijem usvajanju sistema matematičkih znanja i primjene matematike u stvarnom životu.

LITERATURA

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
2. L. Bognar i M. Matijević, *Didaktika*, Školska knjiga, Zagreb, 2005.
3. B. Dizdarević, *Učenje putem rješavanja problema u početnoj nastavi matematike*, Sarajevo, 2011. (magistarski rad)
4. B. Jagodić, *Matematika za II razred devetogodišnje osnovne škole*, Sarajevo Publishing, Sarajevo, 2006.
5. J. Markovac, *Metodika početne nastave matematike*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.
6. M. Marković, M. Šain i Z. Gajić, *Korak po korak 2*, Kreativni centar, Beograd, 2002.
7. *Matematika – škola*, Časopis za nastavu matematike, Element, Zagreb, 2002.
8. R. Ničković, *Učenje putem rješavanja problema u elementarnoj nastavi matematike*, Naučna knjiga, Beograd 1976.
9. M. Stevanović, *Modeli kreativne nastave*, R&S, Tuzla, 2000.