

ORTOGONALNI POLINOMI I RAZVIJANJE PROIZVOLJNE FUNKCIJE U RED PREKO ORTOGONALNIH POLINOMA

Sažetak

U ovom radu pojmu ortogonalnosti pristupamo preko definicije iz matematičke analize, i uopšte ne spominjemo geometrijsko značenje ortogonalnosti i ostavljamo ga negdje u pozadini. Značenje ortogonalnost prihvatamo na isti način kao što smo prihvatili značenje sistema linearnih jednačina, ili kvadrat broja, bez obaveze da geometrijski predstavimo te figure a time i vizuelno prikažemo sebi date pojmove. Glavni dio rada je rezultat da se svaka kvadratno integrabilna funkcija $f(x)$ na (a,b) može napisati u obliku reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) \text{ gdje je skup } \{p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), \dots\}$$

proizvoljan ortonormiran sistem polinoma u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x)$.

Ključne riječi: *ortogonalni polinomi, razvijanje proizvoljne funkcije u red, težinska funkcija, Gram-Schmidtov proces ortogonalizacije*

Summary

In this work we accept the word orthogonal as a term of mathematical analysis, on the basis of its definition, with a geometric association only in the remote background or temporarily in abeyance. Recall that we have already learned to speak of a linear equation or the square of a number without feeling obliged to visualize a geometric figure in connection with every occurrence of the words. Main part of this work is result that every square summable (integrable) function

$f(x)$ defined on (a,b) we can write in the form of series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$ where set $\{p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), \dots\}$ is arbitrary orthonormal system of polynomials with respect to an arbitrary weight function $\rho(x)$.

Keywords: orthogonal polynomials, development of an arbitrary function in series, weight function, Gram-Schmidt process

1. Težinska funkcija

Posmatrajmo polinome $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ za $n = 0, 1, 2, \dots$ i pokažimo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \quad \text{za } n \neq m.$$

Bez gubitka opštosti izračunat ćemo integral za $m > n$. Imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} dx.$$

Ako primijenimo parcijalnu integraciju sa smjenama

$$u = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad dv = \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} dx,$$

$$du = \frac{d}{dx} \left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) dx, \quad v = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2}$$

dobićemo

$$(-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2} dx.$$

Sad primijetimo da je

$$\frac{d}{dx} e^{-x^2} = e^{-x^2} (-2x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = e^{-x^2} (-2x)(-2x) + e^{-x^2} (-2) = e^{-x^2} ((-2x)^2 - 2),$$

$$\frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} = e^{-x^2} (-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2} (8x) = e^{-x^2} ((-2x)^3 + 12x),$$

...

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = e^{-x^2} ((-2x)^n + \dots)$$

pa imamo

$$e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = e^{x^2} e^{-x^2} ((-2x)^n + \dots) e^{-x^2} ((-2x)^{m-1} + \dots) \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

zato što za svaki fiksirani $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x^k e^{-x^2} \rightarrow 0 \quad \text{kad } x \rightarrow \infty.$$

Prema tome

$$(-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2} dx.$$

Ako parcijalnu integraciju ponovimo još $n-1$ puta dobit ćemo

$$(-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} e^{-x^2} dx.$$

Sad primijetimo da je

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) = \frac{d^n}{dx^n} ((-2x)^n + \dots) = (-1)^n 2^n n!,$$

iz čega slijedi

$$(-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^n (-1)^n 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} e^{-x^2} dx = 2^n n! \left(\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}} e^{-x^2} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Možemo zaključiti

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0,$$

ako je $m \neq n$. Ovu relaciju možemo opisati tako što ćemo reći da su funkcije $(e^{-x^2})^{1/2} H_n(x)$, međusobno ortogonalne na intervalu $(-\infty, \infty)$. Istu relaciju možemo opisati i na drugi način, koji je mnogo važniji za tekst koji slijedi, tako što ćemo reći da su polinomi $H_n(x)$, međusobno ortogonalni na intervalu $(-\infty, \infty)$ u odnosu na težinsku funkciju e^{-x^2} . Koncept sistema ortogonalnih polinoma u odnosu na težinsku funkciju će biti dominantan od sad pa nadalje.

Formalizujmo prethodno napisano:

(1.01) Definicija (ortogonalnost u odnosu na težinsku funkciju)

Za dvije funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ kažemo da su međusobno ortogonalne na intervalu (a, b) u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x)$ ako i samo ako

$$\int_a^b \rho(x) f_1(x) f_2(x) dx = 0. \quad \diamond$$

(1.02) Problem

Pokazati da su polinomi

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

međusobno ortogonalni na intervalu $(-\infty, \infty)$ u odnosu na težinsku funkciju e^{-x^2} za $n = 0, 1, 2, \dots$ $\diamond$

Sljedeće što želimo pokazati je da se funkcija $\cos m\theta$, za proizvoljno $m \in N_0$, može izraziti kao polinom C_m stepena m po promjenljivoj $\cos\theta$, a poslije toga želimo pokazati da za takve polinome vrijedi sljedeća jednakost:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} C_m(x) C_k(x) dx = 0.$$

Primjenom adicijonih teorema na izraze $\cos((n+1)\theta)$ i $\cos((n-1)\theta)$ dobijamo

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta,$$

$$\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta - \theta) = \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta.$$

Sabiranjem zadnje dvije jednakosti i premještanjem elemenata, imamo

$$\cos((n+1)\theta) = 2\cos n\theta \cos \theta - \cos((n-1)\theta).$$

Ova jednakost će nam pomoći, da pomoću matematičke indukcije pokažemo sljedeću tvrdnju: Za svaki fiksirani ne-negativni cijeli broj n , postoje cijeli c_{ni} , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, takvi da

$$\cos n\theta = \sum_{i=0}^n c_{ni} \cos^i(\theta).$$

BAZA INDUKCIJE

Za $n = 0$ imamo $\cos 0\theta = 1 = 1 \cdot \cos^0(\theta)$. Prema tome $c_{00} = 1$. Za $n = 1$ imamo $\cos 1\theta = \cos \theta = 1 \cdot \cos^1(\theta)$. Prema tome $c_{10} = 0$, $c_{11} = 1$. Jednakost je tačna za $n = 0$ i $n = 1$.

Korak indukcije

Pretpostavimo da je jednakost tačna za sve $k = 1, 2, \dots, n$ tj. pretpostavimo da za svaki fiksiran cijeli k ($1 \leq k \leq n$) postoje cijeli brojevi c_{ki} , $i = 0, 1, 2, \dots, k$, takvi da

$$\cos k\theta = \sum_{i=0}^k c_{ki} \cos^i(\theta),$$

i na osnovu ove pretpostavke pokažimo da je jednakost tačna za $n+1$. Imamo:

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) &= 2\cos n\theta \cos \theta - \cos((n-1)\theta) \quad \begin{array}{l} \text{na osnovu} \\ \text{pretpostavke} \end{array} = \\ &= 2 \left(\sum_{i=0}^n c_{ni} \cos^i(\theta) \right) \cos \theta - \sum_{i=0}^{n-1} c_{n-1,i} \cos^i(\theta) \\ &= \sum_{i=0}^n 2c_{ni} \cos^{i+1}(\theta) - \sum_{i=0}^{n-1} c_{n-1,i} \cos^i(\theta) \end{aligned}$$

iz čega možemo vidjeti da postoje cijeli brojevi $c_{n+1,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$, takvi da

$$\cos(n+1)\theta = \sum_{i=0}^{n+1} c_{n+1,i} \cos^i(\theta).$$

Možemo zaključiti da je jednakost tačna za svaki $n \in N_0$. Drugim riječima funkcija $\cos n\theta$, za proizvoljno $n \in N_0$, može izraziti kao polinom C_n stepena n po promjenljivoj $\cos \theta$.

Za $m \neq k$ izračunajmo integral $\int_0^\pi \cos m\theta \cos k\theta d\theta$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos k\theta d\theta &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} \cos(m-k)\theta + \frac{1}{2} \cos(m+k)\theta \right) d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(m-k)\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(m+k)\theta d\theta = \\
 &= \frac{1}{2(m-k)} \sin(m-k)\theta \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2(m+k)} \sin(m+k)\theta \Big|_0^{\pi} = 0.
 \end{aligned}$$

U relaciji

$$\int_0^{\pi} \cos m\theta \cos k\theta d\theta = 0, \quad m \neq k$$

neka je $x = \cos\theta$. Tada je $dx = -\sin\theta = -(1-x^2)^{1/2} d\theta$ tj. $d\theta = -(1-x^2)^{-1/2} dx$. Funkcija $\cos m\theta$ se može izraziti kao polinom stepena m po promjenljivoj $\cos\theta$:

$$\cos m\theta = C_m(\cos\theta) = C_m(x),$$

i slično imamo za $\cos k\theta$. Prema tome $\int_0^{\pi} \cos m\theta \cos k\theta d\theta = 0$ postaje

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} C_m(x) C_k(x) dx = 0.$$

Polinomi $C_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, su međusobno ortogonalni na intervalu $[-1, 1]$ u odnosu na težinsku funkciju $(1-x^2)^{-1/2}$. Time smo dokazali Lemu 1.03 i riješili Problem 1.04.

(1.03) Lema

Funkcija $\cos m\theta$, za proizvoljno $m \in N_0$, se može izraziti kao polinom C_m stepena m po promjenljivoj $\cos\theta$.

◇

(1.04) Problem

Pokazati da su polinomi C_m iz Leme 1.03 međusobno ortogonalni na intervalu $(-1,1)$ u odnosu na težinsku funkciju $(1-x^2)^{-1/2}$. $\diamond$

Skoro na isti način (kao u tekstu iznad), može se pokazati sljedeće: Funkcija $\sin(m+1)\theta$ zadovoljava jednakost

$$\sin(m+1)\theta = \sin\theta S_m(\cos\theta),$$

gdje je S_m polinom stepena m po promjenljivoj $\cos\theta$.

Relacija

$$\int_0^\pi \sin(m+1)\theta \sin(k+1)\theta d\theta = 0, \quad m \neq k,$$

je ekvivalentna sa

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} S_m(x) S_k(x) dx = 0.$$

Polinomi $S_m(x)$ su međusobno ortogonalni na intervalu $[-1,1]$ u odnosu na težinsku funkciju $(1-x^2)^{1/2}$.

Na kraju posmatrajmo polinome definisane sa

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Pokažimo da za ove polinome vrijedi

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad \text{za } n \neq m.$$

Zbog pogodnosti pišemo $(x^2 - 1)^n = p_n(x)$, tako da je

$$\int_{-1}^1 P_n(x) x^m dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 p_n(x) x^m dx.$$

Ovaj integral ćemo izračunati za $m < n$ pomoću rekurzije. Prvo primijetimo da

$$p_n^{(k)}(x) = 0 \quad \text{za } x = \pm 1 \text{ i } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Potom parcijalnom integracijom, sa smjenama

$$u = x^m, \quad dv = p_n^{(n)}(x)dx$$

$$du = mx^{m-1}dx, \quad v = p_n^{(n-1)}(x)$$

dobijamo

$$\int_{-1}^1 p_n(x) x^m dx = -m \int_{-1}^1 p_n^{(n-1)}(x) x^{m-1} dx.$$

Ponavljajući još parcijalnu integraciju $m-1$ puta, dolazimo do

$$(-1)^m m! \int_{-1}^1 p_n^{(n-m)}(x) dx = (-1)^m m! \left[p_n^{(n-m-1)}(x) \right]_{-1}^1 = 0 \quad (m < n).$$

Prema tome,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) x^m dx = 0, \quad \text{za } m < n.$$

Kako je P_m polinom stepena m , slijedi da

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad \text{za } n \neq m.$$

Polinomi $P_n(x)$ su međusobno ortogonalni na intervalu

$[-1, 1]$ u odnosu na težinsku funkciju 1. U tekstu iznad smo pokazali rješenje Problema 1.05:

(1.05) Problem

Pokazati da su polinomi definisani sa

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

međusobno ortogonalni na intervalu $(-1, 1)$ u odnosu na težinsku funkciju 1. ◇

Napomena: Polinomi $H_n(x)$ se zovu Hermitovi polinomi reda n . Ovi polinomi se mogu dobiti kao rješenja Hermit-ove diferencijalne jednačine reda n

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Prvih šest Hermitovih polinoma su

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

Polinomi $C_m(x)$ i $S_m(x)$ zovu se trigonometrijski polinomi ili Chebichef-ovi polinomi prve i druge vrste reda n . Ovi polinomi se mogu dobiti kao rješenja Chebichef-ove diferencijalne jednačine reda n

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

Chebichef-ovi polinomi se također, mnogo opštije, primjenjuje u sistemima ortogonalnih polinoma u odnosu na proizvoljnu težinsku funkciju. Prvih šest Chebichef-ovi polinomi prve vrste izraženih preko stepena promjenjive x su:

$$C_0(x) = 1,$$

$$C_1(x) = x,$$

$$C_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$C_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$C_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$C_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Polinomi $P_n(x)$ se zovu Legendre-ovi polinomi reda n . Ovi polinomi se dobiju kao rješenja Legendre-ove diferencijalne jednačine reda n

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Prvih šest Legendre-ovih polinoma su

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

2. Gram-Schmidt-ov proces ortonormalizacije

Neka je $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ proizvoljan niz funkcija na intervalu (a, b) , takav da su sve funkcije u nizu integrabilne i linearno nezavisne. U tekstu koji slijedi, interval (a, b) se može zamjeniti beskonačnim intervalom (a, ∞) ili sa intervalom $(-\infty, \infty)$, ali pod uslovom da svi integrali koji se posmatraju postoje. Pretpostavićemo da je svaka linearna kombinacija $\psi = \alpha_0\phi_0 + \dots + \alpha_m\phi_m$, konačnog broja ϕ -jeva sa konstantnim koeficijentima $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ ne svi nula, različita od nule na skupu tački koje su dovoljne da naprave određen integral od ψ^2 , nad posmatranim intervalom, različit od nule.

U tekstu koji slijedi simboli $P\phi_0P, PG_1P, \dots, PG_nP$ predstavljaju realne brojeve, kao i simboli $\langle \phi_i, g_j \rangle$, za $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Neka je

$$d_0 = \mathbf{P}\phi_0 \mathbf{P}^2 = \int_a^b [\phi_0(x)]^2 dx,$$

$$g_0(x) = \frac{\phi_0(x)}{d_0^{1/2}} = \frac{\phi_0(x)}{\mathbf{P}\phi_0 \mathbf{P}},$$

tako da je $\int_a^b [g_0(x)]^2 dx = 1$. Neka je

$$c_{10} = \langle \phi_1, g_0 \rangle = \int_a^b \phi_1(x) g_0(x) dx,$$

$$G_1(x) = \phi_1(x) - c_{10} g_0(x) = \phi_1(x) - \langle \phi_1, g_0 \rangle g_0(x),$$

$$d_1 = \mathbf{P}G_1 \mathbf{P}^2 = \int_a^b [G_1(x)]^2 dx,$$

$$g_1(x) = \frac{G_1(x)}{d_1^{1/2}} = \frac{G_1(x)}{\mathbf{P}G_1 \mathbf{P}}.$$

Tada je

$$\int_a^b G_1(x) g_0(x) dx = \int_a^b (\phi_1(x) - \langle \phi_1, g_0 \rangle g_0(x)) g_0(x) dx = 0,$$

$$\int_a^b g_1(x) g_0(x) dx = \int_a^b \frac{G_1(x)}{\mathbf{P}G_1 \mathbf{P}} g_0(x) dx = \frac{1}{\mathbf{P}G_1 \mathbf{P}} \int_a^b G_1(x) g_0(x) dx = 0,$$

$$\int_a^b [g_1(x)]^2 dx = 1.$$

U opštem slučaju neka su funkcije $g_2(x)$, $g_3(x)$, ... definisane uzastopno sa relacijama

$$c_{nk} = \langle \phi_n, g_k \rangle = \int_a^b \phi_n(x) g_k(x) dx,$$

$$G_n(x) = \phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_{nk} g_k(x) = \phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \langle \phi_n, g_k \rangle g_k(x),$$

$$d_n = \mathbf{P}G_n \mathbf{P}^2 = \int_a^b [G_n(x)]^2 dx,$$

$$g_n(x) = \frac{G_n(x)}{d_n^{1/2}} = \frac{G_n(x)}{\mathbf{P}G_n \mathbf{P}}.$$

Matematičkom indukcijom nije teško pokazati da je svaka od funkcija $g_n(x)$ ortogonalna na $g_0(x), \dots, g_{n-1}(x)$

$$\begin{aligned} \int_a^b g_n(x) g_m(x) dx &= \int_a^b \frac{G_n(x)}{P_{G_n} P} g_m(x) dx = \frac{1}{P_{G_n} P} \int_a^b G_n(x) g_m(x) dx = \\ &= \frac{1}{P_{G_n} P} \int_a^b \left(\phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \langle \phi_n, g_k \rangle g_k(x) \right) g_m(x) dx = \\ &= \frac{1}{P_{G_n} P} \int_a^b \phi_n(x) g_m(x) dx - \frac{1}{P_{G_n} P} \sum_{k=0}^{n-1} \langle \phi_n, g_k \rangle \int_a^b g_k(x) g_m(x) dx = \\ &= \frac{1}{P_{G_n} P} \langle \phi_n, g_m \rangle - \frac{1}{P_{G_n} P} \sum_{k=0}^{n-1} \langle \phi_n, g_k \rangle \int_a^b g_k(x) g_m(x) dx, \end{aligned}$$

i da je svaka od funkcija $g_0(x), \dots, g_n(x)$ normalizovana, tj. imaju vrijednost 1 kao integral njihovih kvadrata nad intervalom (a, b) . Kako je relacija ortogonalnosti simetrična, isto tako možemo reći da su proizvoljne dvije funkcije g_i, g_j međusobno ortogonalne, za $i \neq j$. Činjenica da su g -ovi oboje, i međusobno ortogonalne i normalizovane, se sumira u jednu riječ, koju zovemo ortonormirane funkcije.

Ako kao ϕ -ove uzmemo konkretno funkcije $1, x, x^2$ i x^3 ,

na intervalu $(-1, 1)$ tada kao odgovarajuće g -ove ćemo dobiti $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1) \text{ i } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5x^3 - 3x). \text{ Pokažimo ovo.}$$

$$d_0 = P\phi_0 P = P1P = \int_{-1}^1 1^2 dx = 2,$$

$$g_0(x) = \frac{\phi_0(x)}{d_0^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

tako da je $\int_{-1}^1 [g_0(x)]^2 dx = 1$. Dalje

$$c_{10} = \langle x, g_0 \rangle = \int_{-1}^1 x \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 0,$$

$$G_1(x) = \phi_1(x) - c_{10}g_0(x) = x - 0 \cdot g_0(x) = x,$$

$$d_1 = \mathbf{P}x\mathbf{P} = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$g_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x,$$

tako da je $\int_{-1}^1 g_1(x)g_0(x)dx = 0$, $\int_{-1}^1 [g_1(x)]^2 dx = 1$. Dalje

$$c_{20} = \langle x^2, g_0 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$c_{21} = \langle x^2, g_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = 0,$$

$$G_2(x) = x^2 - c_{20}g_0(x) - c_{21}g_1(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$d_2 = \mathbf{P}x^2 - \frac{1}{3}\mathbf{P} = \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45},$$

$$g_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1),$$

tako da je $\int_{-1}^1 g_2(x)g_0(x)dx = 0$, $\int_{-1}^1 g_2(x)g_1(x)dx = 0$,

$\int_{-1}^1 [g_2(x)]^2 dx = 1$. Na kraju

$$c_{30} = \langle x^3, g_0 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 0,$$

$$c_{31} = \langle x^3, g_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = \frac{\sqrt{6}}{5},$$

$$c_{32} = \langle x^3, g_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1) dx = 0,$$

$$G_3(x) = x^3 - c_{30}g_0(x) - c_{31}g_1(x) - c_{32}g_2(x) = x^3 - \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} x = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$d_3 = \mathbf{P}x^3 - \frac{3}{5}x\mathbf{P} = \int_{-1}^1 \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{8}{175},$$

$$g_3(x) = \sqrt{\frac{175}{8}} \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5x^3 - 3x),$$

$$\text{tako da je } \int_{-1}^1 g_3(x)g_0(x)dx = 0, \quad \int_{-1}^1 g_3(x)g_1(x)dx = 0,$$

$$\int_{-1}^1 g_3(x)g_2(x)dx = 0, \quad \int_{-1}^1 [g_3(x)]^2 dx = 1. \text{ Primijetimo da su dobijeni}$$

polinomi $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1)$ i $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5x^3 - 3x)$ u stvari prva

četiri normirana Legendre-ova polinoma.

Opisana procedura za konstrukciju ortogonalnog sistema iz proizvoljnog datog skupa funkcija je poznata pod imenom Gram-Schmidt-ov proces ortogonalizacije. Formalizujmo prethodno napisani tekst:

(2.01) Teorema (Gram-Schmidt-ova postupak ortogonalizacije)

Neka je $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ proizvoljan niz funkcija na intervalu (a, b) , takav da su sve funkcije iz niza integrabilne na (a, b) i linearno nezavisne. Tada je Gram-Schmidt-ov niz definisan sa

$$g_0(x) = \frac{\phi_0(x)}{\int_a^b [\phi_0(x)]^2 dx},$$

$$g_k(x) = \frac{\phi_k(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \left(\int_a^b \phi_k(x)g_i(x)dx \right) g_i(x)}{\int_a^b \left[\phi_k(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \left(\int_a^b \phi_k(x)g_i(x)dx \right) g_i(x) \right]^2 dx} \quad \text{za } k = 1, 2, 3, \dots, n$$

ortonormiran niz.

◇

(2.02) Vježba

Primjenom Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije konstruisati ortonormiran sistem polazeći od skupa funkcija $\{1, x, x^2, x^3\}$, koristeći interval $(-1, 1)$. $\diamond$

Funkcija g_n je u stvari linearna kombinacija od $\phi_0, \dots, \phi_n$ (pod frazom linearna kombinacija će se uvijek podrazumijevati linearna kombinacija sa konstantnim koeficijentima)

$$g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{d_0}} \phi_0(x),$$

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{d_1}} G_1(x) = \frac{1}{\sqrt{d_1}} \phi_1(x) - \frac{c_{10}}{\sqrt{d_1}} g_0(x),$$

$$g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{d_2}} G_2(x) = \frac{1}{\sqrt{d_2}} \phi_2(x) - \frac{c_{20}}{\sqrt{d_2}} g_0(x) - \frac{c_{21}}{\sqrt{d_2}} g_1(x),$$

...

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{d_n}} G_n(x) = \frac{1}{\sqrt{d_n}} \phi_n(x) - \frac{c_{n0}}{\sqrt{d_n}} g_0(x) - \frac{c_{n1}}{\sqrt{d_n}} g_1(x) - \dots - \frac{c_{n,n-1}}{\sqrt{d_n}} g_{n-1}(x),$$

i obrnuto, s obzirom da su koeficijenti uz ϕ_n u izrazu za g_n , u svim slučajima različiti od nule, relaciska veza ϕ -eva sa g -ovima se može uspješno riješiti, svaki ϕ_n je linearna kombinacija od $g_0, \dots, g_n$. Pokažimo ovo zadnje.

Već smo primjetili da je svaki $g_n(x)$ linearna kombinacija od $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$. Drugim riječima za svaki $g_n(x)$ postoje koeficijenti $a_{ni} \in R$, ($i = 0, 1, \dots, n$) takvi da

$$g_n(x) = a_{n0}\phi_0(x) + a_{n1}\phi_1(x) + \dots + a_{nn}\phi_n(x),$$

tj. ako posmatramo funkcije $g_0(x), g_1(x), \dots, g_n(x)$ imamo

$$g_0(x) = a_{00}\phi_0(x),$$

$$g_1(x) = a_{10}\phi_0(x) + a_{11}\phi_1(x),$$

$$g_2(x) = a_{20}\phi_0(x) + a_{21}\phi_1(x) + a_{22}\phi_2(x)$$

...

$$g_n(x) = a_{n0}\phi_0(x) + a_{n1}\phi_1(x) + \dots + a_{nn}\phi_n(x).$$

Jednakosti iznad možemo napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} g_0(x) \\ g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}.$$

Ako napisanu gornje-trougaoanu matricu označimo sa A , kako je a_{ii} različit od nule za svaki $i = 0, 1, 2, \dots, n$, matrica A je nesusingularna, pa dati sistem ima jedinstveno rješenje. Matrica koja je inverzna gornje-trougaoanoj matrici mora biti gornje-trougona. Prema tome svaki ϕ_n se može napisati kao linearna kombinacija od $g_0, g_1, \dots, g_n$. Iz ovoga slijedi da je g_n ortogonalan na svaku linearnu kombinaciju od $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$. Time smo dokazali sljedeće dvije leme:

(2.03) Lema

Neka su $\phi_0, \dots, \phi_n, g_0, \dots, g_n$, funkcije iz Teoreme 2.01. Tada svaka funkcija $g_k, k = 0, 1, \dots, n$, se može napisati kao linearna kombinacija od $\phi_0, \dots, \phi_k$, i obrnuto, svaka funkcija $\phi_k, k = 0, 1, \dots, n$, se može napisati kao linearna kombinacija od $g_0, \dots, g_k$. $\diamond$

(2.04) Lema

Neka su $\phi_0, \dots, \phi_n, g_0, \dots, g_n$, funkcije iz Teoreme 2.01. Tada je funkcija $g_k, k = 0, 1, \dots, n$, ortogonalna na svaku linearnu kombinaciju od $\phi_0, \dots, \phi_{k-1}$. $\diamond$

Ako je $\gamma(x)$ neka linearna kombinacija od $\phi_0, \dots, \phi_n$ koja je ortogonalna na svaku od funkcija $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$, ona mora biti konstanta pomnožena sa $g_n(x)$. Ovo možemo vidjeti iz procesa konstrukcije $g_n(x) = G_n(x)/d_n^{1/2}$, gdje su c_{10} i ostali koeficijenti niza c_{nk} u funkcijama $G_n(x)$ jedinstveno određeni zbog zahtjeva ortogonalnosti u svakom koraku, a koeficijenti uz $\phi_n(x)$ su jedinice ($G_n(x) = \phi_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_{nk} g_k$). Iako osobina ortogonalnosti sama po sebi dozvoljava množenje čitavog izraza $G_n(x)$ sa proizvoljnim konstantnim faktorom, da je $\gamma(x)$ konstanta pomnožena sa $g_n(x)$ možemo pokazati i na sljedeći način. Ako su $a_n > 0$ i $a_{n'}$ koeficijenti uz ϕ_n u g_n i γ -i redom

$$g_n(x) = a_n \phi_n(x) + \dots + a_0 \phi_0(x),$$

$$\gamma(x) = a_{n'} \phi_n(x) + \dots + a'_0 \phi_0(x),$$

izraz $\gamma - \frac{a_{n'}}{a_n} g_n$ ne sadrži ϕ_n ; i on je linearna kombinacija od $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$ koji je ortogonalan na svaku od ovih funkcija (kako je γ ortogonalna na svaku od $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$ i kako je g_n ortogonalna na svaku od $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$ slijedi da je i $\gamma - \frac{a_{n'}}{a_n} g_n$ ortogonalna na svaku od $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$), pa je ortogonalna i na sebe, tj. integral njezinog kvadrata nad posmatranim intervalom je nula. Ovo znači da je $\gamma - \frac{a_{n'}}{a_n} g_n = 0$, pa kako su ϕ -jevi linearno nezavisni svi koeficijenti po kojima je ova funkcija izražena, preko članova od $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$, moraju biti nula. Dalje, ako je posmatrana γ normalizovana i vrijedi da je $a'y_n \leq 0$, γ mora biti identički jednaka sa g_n . Time smo dokazali Lemu 2.05:

(2.05) Lema

Ako je $\gamma(x)$ linearna kombinacija od $\phi_0, \dots, \phi_n$ koja je ortogonalna na svaku od funkcija $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$, tada postoji konstanta $\alpha \in \mathbb{R}$ takva da $\gamma(x) = \alpha g_n(x)$, za svako x . $\diamond$

3. Ortogonalni polinomi koji odgovaraju proizvoljnoj težinskoj funkciji

Neka je $\rho(x)$ ne-negativna funkcija koja je integrabilna nad (a, b) , i koja ima osobinu da je vrijednost određenog integrala $\rho(x)$ nad (a, b) u stvari pozitivan. U većini važnih primjena $\rho(x)$ će biti neprekidan i pozitivan kroz čitav interval, osim možda u krajnjim tačkama, gdje može nestati ili postati beskonačan. U slučaju beskonačnog intervala obično se pretpostavi da je proizvod $\rho(x)$ sa proizvoljnim polinomom, integrabilan, nad posmatranim intervalom. Neka je proizvod $[\rho(x)]^{1/2} x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ uzeta kao funkcija iz Teoreme 2.01. Odgovarajuće funkcije $g_n(x)$, koje su u stvari linearne kombinacije ovih (Lema 2.03), će biti oblika $[\rho(x)]^{1/2} p_n(x)$, gdje su $p_n(x)$ polinomi stepena n . Izračunajmo prvih nekoliko polinoma.

$$d_0 = \langle \phi_0, \phi_0 \rangle = \langle [\rho(x)]^{1/2} x^0, [\rho(x)]^{1/2} x^0 \rangle = \int_a^b \rho(x) dx,$$

$$g_0(x) = \frac{[\rho(x)]^{1/2} x^0}{d_0^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{d_0}} [\rho(x)]^{1/2} = [\rho(x)]^{1/2} p_0(x),$$

gdje je $p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{d_0}}$. Izračunajmo $g_1(x)$

$$c_{10} = \langle \phi_1, g_0 \rangle = \int_a^b [\rho(x)]^{1/2} x^1 \frac{1}{\sqrt{d_0}} [\rho(x)]^{1/2} dx = \frac{1}{\sqrt{d_0}} \int_a^b \rho(x) x dx,$$

$$G_1(x) = \phi_1(x) - c_{10}g_0(x) = [\rho(x)]^{1/2}x^1 - c_{10}\frac{1}{\sqrt{d_0}}[\rho(x)]^{1/2} = [\rho(x)]^{1/2}\left(x - \frac{c_{10}}{\sqrt{d_0}}\right),$$

$$d_1 = \mathbf{P}G_1\mathbf{P}^2 = \int_a^b [G_1(x)]^2 dx,$$

$$g_1(x) = \frac{G_1(x)}{d_1^{1/2}} = [\rho(x)]^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}x - \frac{c_{10}}{\sqrt{d_1d_0}}\right) = [\rho(x)]^{1/2}p_1(x),$$

$$\text{gdje je } p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{d_1}}x - \frac{c_{10}}{\sqrt{d_1d_0}}. \text{ Izračunajmo } g_2(x)$$

$$c_{20} = \langle \phi_2, g_0 \rangle = \int_a^b [\rho(x)]^{1/2}x^2[\rho(x)]^{1/2}p_0(x)dx = \int_a^b \rho(x)x^2p_0(x)dx,$$

$$c_{21} = \langle \phi_2, g_1 \rangle = \int_a^b [\rho(x)]^{1/2}x^2[\rho(x)]^{1/2}p_1(x)dx = \int_a^b \rho(x)x^2p_1(x)dx,$$

$$G_2(x) = \phi_2(x) - c_{20}g_0(x) - c_{21}g_1(x) = [\rho(x)]^{1/2}x^2 - c_{20}[\rho(x)]^{1/2}p_0(x) - c_{21}[\rho(x)]^{1/2}p_1(x) =$$

$$= [\rho(x)]^{1/2}\left(x^2 - c_{20}p_0(x) - c_{21}p_1(x)\right) = [\rho(x)]^{1/2}\left(x^2 - \frac{c_{20}}{\sqrt{d_0}} - \frac{c_{21}}{\sqrt{d_1}}x - \frac{c_{21}c_{10}}{\sqrt{d_1d_0}}\right),$$

$$d_2 = \mathbf{P}G_2\mathbf{P}^2 = \int_a^b [G_2(x)]^2 dx,$$

$$g_2(x) = \frac{G_2(x)}{d_2^{1/2}} = [\rho(x)]^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{d_2}}x^2 - \frac{c_{21}}{\sqrt{d_2d_1}}x - \frac{c_{21}c_{10}}{\sqrt{d_2d_1d_0}} - \frac{c_{20}}{\sqrt{d_2d_0}}\right) = [\rho(x)]^{1/2}p_2(x),$$

$$\text{gdje je } p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{d_2}}x^2 - \frac{c_{21}}{\sqrt{d_2d_1}}x - \frac{c_{21}c_{10}}{\sqrt{d_2d_1d_0}} - \frac{c_{20}}{\sqrt{d_2d_0}}.$$

Ako pretpostavimo da su $g_k(x) = [\rho(x)]^{1/2}p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, funkcije dobijene Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije pomoću funkcija $\phi_k(x) = [\rho(x)]^{1/2}x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, gdje je svaki $p_k(x)$ polinomi stepena k , tada za

$g_n(x)$ imamo

$$c_{nk} = \langle \phi_n, g_k \rangle = \int_a^b [\rho(x)]^{1/2} x^n [\rho(x)]^{1/2} p_k(x) dx = \int_a^b \rho(x) x^n p_k(x) dx,$$

$$G_n(x) = \phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_{nk} g_k(x) = [\rho(x)]^{1/2} x^n - \sum_{k=0}^{n-1} [\rho(x)]^{1/2} p_k(x) = [\rho(x)]^{1/2} \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) \right)$$

$$d_n = \mathbf{P} G_n \mathbf{P}^2 = \int_a^b [G_n(x)]^2 dx,$$

$$g_n(x) = \frac{G_n(x)}{d_n^{1/2}} = [\rho(x)]^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} x^n - \frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) \right).$$

Prema tome matematičkom indukcijom sad nije teško pokazati teoremu 3.01.

(3.01) Teorem

Neka je dat skup funkcija

$$\{[\rho(x)]^{1/2}, [\rho(x)]^{1/2} x, [\rho(x)]^{1/2} x^2, \dots, [\rho(x)]^{1/2} x^n, \dots\}$$

i neka je $\rho(x)$ ne-negativna funkcija takva da integral proizvoda proizvoljnog polinoma sa $\rho(x)$ nad intervalom (a, b) uvijek postoji. Tada Gram-Schmidtovim postupkom iz datog skupa funkcija možemo konstruisati ortonormiran sistem

$$\{[\rho(x)]^{1/2} p_0(x), [\rho(x)]^{1/2} p_1(x), [\rho(x)]^{1/2} p_2(x), \dots, [\rho(x)]^{1/2} p_n(x), \dots\}$$

gdje su $p_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$, polinomi stepena k . $\diamond$

Polinomi $p_n(x)$ su normirani ortogonalni ili ortonormirani polinomi sa $\rho(x)$ kao težinskom funkcijom. Oni zadovoljavaju uslove

$$\int_a^b \rho(x) p_m(x) p_n(x) dx = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_a^b \rho(x) [p_n(x)]^2 dx = 1.$$

Svaki od polinoma je stepena prikazan kao njegov subskript,

i koeficijent uz član x^n je pozitivan. Ove osobine potpuno određuju sistem polinoma $p_n(x)$.

Pokažimo da je proizvoljan ortogonalan sistem funkcija $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ linearno nezavisan. Pretpostavimo da je suma $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x) = 0$ za neke $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Tada

$$0 = \sum_{k=1}^n \int_a^b \alpha_k f_k(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) \right) \alpha_k f_k(x) dx = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \int_a^b [f_k(x)]^2 dx.$$

Ovo povlači da je $\alpha_k = 0$ za svaki $k = 1, 2, \dots, n$, prema tome $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ je linearno nezavisan skup. Time je dokazana Teroema 3.02.

(3.02) Teorem

Ortogonalni sistemi su linearno nezavisni.

◇

Prema tome možemo zaključiti da je sistem

$$\{[\rho(x)]^{1/2} p_0(x), [\rho(x)]^{1/2} p_1(x), [\rho(x)]^{1/2} p_2(x), \dots, [\rho(x)]^{1/2} p_n(x)\}$$

linearno nezavisan, pa je i skup polinoma

$$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)\}$$

linearno nezavisan. Ili drugim riječima, svaki polinom n -tog stepena se može izraziti kao linearna kombinacija od $p_0(x)$, ..., $p_n(x)$. Svaki $p_n(x)$ je ortogonalan na svaki polinom nižeg stepena u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x)$, tj. ako je $q(x)$ bilo koji takav polinom,

$$\int_a^b \rho(x) p_n(x) q(x) dx = 0.$$

Ove činjenice su direktne posljedice opštih rezultata dobijenih u Lemama 2.03 i 2.04. U tekstu iznad smo pokazali sljedeće dvije tvrdnje:

(3.03) Propozicija

Neka su $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, polinomi iz Teoreme 3.01. Tada se svaki polinom n -tog stepena može napisati kao linearna kombinacija od $p_0(x)$, ..., $p_n(x)$. $\diamond$

(3.04) Posljedica

Neka su $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, polinomi iz Teoreme 3.01. Tada je svaki $p_k(x)$ ortogonalan na proizvoljan polinom nižeg stepena, u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x)$. $\diamond$

4. Razvijanje proizvoljne funkcije u red

Polinomi $p_n(x)$ iz Teoreme 3.01 se mogu koristiti za formalno razlaganje proizvoljne funkcije u red. Formule su komplikovanije zbog prisustva težinske funkcije, ali su u drugu ruku, jednostavnije zbog činjenice da su p -ovi normalizovani. Želimo znati kada se proizvoljna funkcija $f(x)$ može napisati u obliku reda

$$f(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

tj. kada se funkcija $f(x)$ može razviti u red po ortogonalnim polinomima $p_n(x)$. Pretpostavimo da se $f(x)$ može razviti u ovakav red i da su sljedeće operacije opravdane. Množenjem sa $\rho(x)p_k(x)$ i integriranjem u granicama od a do b dobijemo

$$\int_a^b \rho(x) f(x) p_k(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \rho(x) p_k(x) p_n(x) dx.$$

Zbog ortonormiranih osobina polinoma $p_k(x)$, svi integrali na desnoj strani jednaki su nuli, osim kada je $k = n$, i u tom slučaju

$$\int_a^b \rho(x) p_k(x) p_k(x) dx = 1.$$

Prema tome

$$c_k = \int_a^b \rho(x) f(x) p_k(x) dx.$$

Koeficijenti $c_n(x)$ se nazivaju Furijerovi koeficijenti koeficijenti funkcije $f(x)$ u odnosu na ortonorirane polinome $p_n(x)$ sa težinskom funkcijom $\rho(x)$. Red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$, gdje su c_n Furijeovi koeficijenti funkcije $f(x)$ naziva se Furijeov red funkcije $f(x)$. Furijeovi koeficijenti postoje za svaku funkciju $f(x)$ koja je kvadratno sumabilna na (a, b) sa težinskom funkcijom $\rho(x)$. Na osnovu nejednakosi Cauchy-Bunjakovskog

$$\left| \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b [f_1(x)]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b [f_2(x)]^2 dx \right)^{1/2}$$

integral $\int_a^b \rho(x) f(x) p_k(x) dx$ konvergira za ovakve funkcije. Dalke, za svaku ovakvu funkciju $f(x)$ možemo napisati njen Fourierov red, ali bez daljeg ispitivanja ne znamo da li je red konvergira i ako konvergira da li mu je suma $f(x)$.

Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$ Furierov red funkcije $f(x)$ (tj. ako su

$$c_n = \int_a^b \rho(x) f(x) p_n(x) dx) \text{ onda pišemo } f(x): \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x).$$

Prethodni tekst možemo sumirati sljedećom teoremom:

(4.01) Teorema

(Furieroovo razlaganje u odnosu na ortogonalne polinome)

Neka je

$$\{[\rho(x)]^{1/2} p_0(x), [\rho(x)]^{1/2} p_1(x), [\rho(x)]^{1/2} p_2(x), \dots, [\rho(x)]^{1/2} p_n(x), \dots\}$$

ortonormirani sistem iz Teoreme 3.01. Tada se svaka kvadratno sumabilna funkcija $f(x)$ na (a, b) može napisati u obliku

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x).$$

Ovo zovemo Furijerovo razlaganje funkcije $f(x)$ na intervalu (a, b) u odnosu na ortogonalne polinome i pišemo

$$f(x) : \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x).$$

Skalare

$$c_n = \int_a^b \rho(x) f(x) p_n(x) dx,$$

zovemo Furierovi koeficijenti funkcije $f(x)$ u odnosu na ortogonalne polinome $p_n(x)$ sa težinskom funkcijom $\rho(x)$. $\diamond$

Neka $s_n(x)$ označavaju parcijalnu sumu reda $\sum_{k=0}^{\infty} c_k p_k(x)$ sve do člana n -tog stepena: $s_n(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \dots + c_n p_n(x)$.

Ako umjesto x uzmemo varijablu t u formuli za Furijerove koeficijenet $c_k = \int_a^b \rho(t) f(t) p_k(t) dx$, i dobijeni izraz zamjenimo umjesto c -ova u prethodnu jednakost, dobićemo

$$s_n(x) = p_0(x) \int_a^b \rho(t) f(t) p_0(t) dx + \int_a^b p_1(x) \rho(t) f(t) p_1(t) dx + \dots + p_n(x) \int_a^b \rho(t) f(t) p_n(t) dx,$$

$$s_n(x) = \int_a^b \rho(t) f(t) [p_0(x) p_0(t) + p_1(x) p_1(t) + \dots + p_n(x) p_n(t)] dx,$$

$$s_n(x) = \int_a^b \rho(t) f(t) K_n(x, t) dt,$$

gdje je

$$K_n(x, t) = K_n(t, x) = \sum_{k=0}^n p_k(t) p_k(x).$$

U stvari, ako je $f(x)$ polinom n -tog ili nižeg stepena, $f(x) = \pi_n(x)$, iz prethodnog dijela je poznato da postoji reprezentacija oblika $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$ gdje je desna strana konačna suma umjesto

beskonačnog reda. Procedura za određivanje koeficijenata tada se primjenjuje uz pitanja konvergencije, i koeficijenti su dati sa

$c_k = \int_a^b \rho(x) f(x) p_k(x) dx$. U ovom slučaju $s_n(x)$ je isti kao $\pi_n(x)$, i $\pi_n(x)$ je identički proizveden pomoću formule

$$\pi_n(x) = \int_a^b \rho(t) \pi_n(t) K_n(x, t) dt.$$

Na primjer, posmatrajmo ortonormirane Legendreove polinome koje smo dobili u vježbi 2.02

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5x^3 - 3x).$$

Ako razvijamo polinom $p(x) = x^3 - 1$ preko P_0 , P_1 , P_2 i P_3 imamo

$$c_0 = \int_{-1}^1 (x^3 - 1)P_0(x)dx = -\sqrt{2},$$

$$c_1 = \int_{-1}^1 (x^3 - 1)P_1(x)dx = \frac{\sqrt{6}}{5},$$

$$c_2 = \int_{-1}^1 (x^3 - 1)P_2(x)dx = 0,$$

$$c_3 = \int_{-1}^1 (x^3 - 1)P_3(x)dx = \frac{2\sqrt{14}}{35}.$$

Prema tome

$$x^3 - 1 = -\sqrt{2}P_0(x) + \frac{\sqrt{6}}{5}P_1(x) + 0P_2(x) + \frac{2\sqrt{14}}{35}P_3(x).$$

Time smo riješili zadatak 4.02.

(4.02) Zadatak

Polinom $p(x) = x^3 - 1$ napisati kao linearnu kombinaciju

Lagendreovih ortonormiranih polinoma $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$

$$P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1) \quad i \quad P_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5x^3 - 3x).$$

Literatura

- T. M. Apostol: “*Mathematical Analysis*”, second edition, China Machine Press, 2004., strana 104-121
- L. Debnath, P. Mikusinski: “*Hilbert Spaces with Applications*”, Elsevier Academic Press, 2005., strana 98-143
- D. Jackson: “*Fourier series and orthogonal polynomials*”, Third Impression, The Mathematical Association of America, 1948., strana 149-184
- P. Junghanns: “*Lecture Notes from Orthogonal Polynomials*”, Summer Term 2012, skinuto sa web stranice www-user.tu-chemnitz.de/~peju/skripte/orthopol/OrthPoly_Engl.pdf, strana 15-27
- S. Kalabušić, M. Malenica: “*Specijalne funkcije (Teorija i zadaci)*”, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, 2010., strana 309-349