

Dževad Burgić
Edin Tabak

TEORIJA BIFURKACIJA

Sažetak

Diferentne jednačbe i sistemi diferentnih jednačbi imaju sve širu primjenu u mnogim područjima nauke prije svega u matematičkoj biologiji, epidemiologiji i ekonomiji gdje $(n+1)$ -va generacija ili stanje sistema zavisi od n -prethodnih generacija ili stanja. Imajući na umu značaj proučavanja diferentnih jednačbi i sistema diferentnih jednačbi, u ovom radu smo se odlučili da detaljnije izučimo fenomen bifurkacije, odnosno bifurkacije udvostručenja perioda.

Ključne riječi: *bifurkacija, preslikavanje, globalno stabilna mnogostrukost, monotonost, rješenje perioda dva.*

Summary

Difference equation and systems of difference equations, have increasing use in many areas of science primarily in mathematical biology, epidemiology and economy where $(n+1)$ – st generation or system state depends of n -previous generations or states. Having in mind importance of studying difference equations and systems of difference equations, in this work we have decided further to investigate phenomenon of bifurcation, or period-doubling bifurcation.

Key words: *bifurcation, map, globally stable multiplicity, monotone, solution of period two.*

Uvod

Proučavanje promjena o kvalitativnom ponašanju rješenja diferentne jednačine kada parametar varira naziva se *teorija bifurkacija*. Kaže se da diferentna ili diferencijalna jednačina ima stabilnu periodičnu strukturu ako se kvalitativna struktura rješenja ne mijenja za male promjene (varijacije) parametara. Vrijednost parametra za koju se kvalitativna struktura rješenja mijenja naziva se *bifurkaciona vrijednost*.

Postoji korisna grafička metoda za opisivanje kvalitativnih promjena u globalnom ponašanju diferentne jednačine

$$x_{n+1} = F(\lambda, x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

u zavisnosti od parametra λ . Metoda se sastoji iz crtanja krivih u (λ, x) – ravni, gdje krive opisuju granične vrijednosti za svaku vrijednost parametra λ iz nekog intervala. Crtanjem ovih krivih dobijamo *dijagram bifurkacije*.

1. Teorija bifurkacija i monotona preslikavanja

Posmatrajmo diferentnu jednačinu

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

gdje je $f \in C[J, J]$ za neki interval J realnih brojeva.

Definicija 1. Neka je $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednačine (2).

1. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je monotono neopadajući niz ako je $x_{n+1} \geq x_n$ za svako $n \geq 0$.
2. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je monotono nerastući niz ako je $x_{n+1} \leq x_n$ za svako $n \geq 0$.
3. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je monotoni niz ako je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ujedno i monotono neopadajući ili monotono nerastući.

Lema 1. Pretpostavimo da je f neopadajuća funkcija, i neka je $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednačine (2). Onda je $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ monoton niz.

Dokaz: Pretpostavimo da je $x_0 \leq x_1$. Onda je

$$x_1 = f(x_0) \leq f(x_1) = x_2.$$

Matematičkom indukcijom se lako dokzuje da je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

monotono neopadajući. Dokaz da $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je monotono nerastući ako $x_0 \geq x_1$ je sličan i bit će izostavljen.

Primjer 1. Slučaj kada je f opadajuća funkcija je značajno drugačiji od toga kada je funkcija rastuća.

1. Diferentna jednačina

$$x_{n+1} = -x_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

ima jedinstveno rješenje-tačku ravnoteže ili ekvilibrijum 0. Svako netrivialno rješenje ove jednačine je periodično sa primarnim periodom 2. Ustvari, svako rješenje ove jednačine je oblika $\{a, -a, a, -a, \dots\}$, gdje $a \in \mathbb{R}$ je polazna tačka.

2. Diferentna jednačina

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

ima dva ekvilibrijuma -1 i 1. Svako netrivialno rješenje ove jednačine je periodično sa primarnim periodom 2. U stvari, svako rješenje ove jednačine ima oblik $\{a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, \dots\}$, gdje je $a \neq 0$ polazna tačka.

Ovdje ćemo proučavati kako promjene parametra λ jednačine (1) utječu na rješenje jednačine (1). Radi jednostavnosti izlaganja, pretpostavimo da preslikavanje f ima fiksnu tačku $\bar{x} = 0$. Inače, možemo koristiti zamjenu $y_n = x_n - \bar{x}$. Pretpostavimo da je $f'(0) > 0$ odnosno da je f monotono rastuća u dovoljno maloj okolini fiksne tačke 0. Ako je $F(\lambda, x)$ je neprekidna diferencijabilna funkcija, onda slijedi da je $F(\lambda, x)$ također monotona u x za sve male vrijednosti λ .

Naime, po Taylor-ovoj formuli imamo

$$F(\lambda, x) = F(\lambda, 0) + \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, 0)x + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\lambda, 0)\frac{x^2}{2} + \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(\lambda, 0)\frac{x^3}{6} + G(\lambda, 0) = \\ = a(\lambda) + b(\lambda)x + c(\lambda)x^2 + d(\lambda)x^3 + G(\lambda, x)$$

gdje je

$$a(\lambda) = F(\lambda, 0), \quad b(\lambda) = \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, 0), \quad c(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\lambda, 0), \quad d(\lambda) = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(\lambda, 0)$$

i $G(\lambda, x)$ označava članove višeg reda u Taylor-ovom razvoju funkcije $F(\lambda, x)$. Sada, za svako fiksno λ , analiza fiksnih tačaka u ekvivalentna je analizi nule funkcije $F(\lambda, x) - x$. Ako se može riješiti jednačina $F(\lambda, x) - x = 0$

za x , onda dobijamo eksplicitnu zavisnost $x = x(\lambda)$. Nažalost, u mnogo slučajeva ne možemo naći eksplicitnu zavisnost i moramo razmatrati implicitnu zavisnost. U tom slučaju, analiza se bazira na *teoremu implicitnih funkcija*.

Sada ćemo analizirati bifurkacije nula funkcije $F(\lambda, x) - x = 0$ ili, ekvivalentno, bifurkacije odgovarajuće diferentne jednačine

$$x_{n+1} = F(\lambda, x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

pod raznim modelima hipoteza za linearne - $b(\lambda)$, kvadratne - $c(\lambda)$, i kubne - $d(\lambda)$ uslove.

1.1 Slučaj hiperboličke fiksne tačke

Pretpostavimo da je f monotono preslikavanje sa $f(0) = 0$ i $f'(0) \neq 1$. Onda, perturbirano preslikavanje $F(\lambda, x)$ zadovoljava

$$F(0, x) = f(x) \quad \text{i} \quad b(\lambda) = \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, 0) \approx \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = f'(0) \neq 1,$$

takvo da je

$$F(\lambda, x) \approx F(\lambda, 0) + f'(0)x,$$

za $|\lambda|$ dovoljno malo. Približna perturbirana jednačina u ovom

slučaju je

$$x_{n+1} = F(\lambda, 0) + f'(0)x_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

koja ima jedinstvenu fiksnu tačku u okolini nule a stabilnost je ista

kao i stabilnost fiksne tačke nule neperturbiranog preslikavanja f .

Jednostavan primjer koji ilustruje ovaj slučaj je sljedeći.

Primjer 2. Linearna diferentna jednačina

$$x_{n+1} = \lambda + px_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

može biti posmatrana kao perturbirana diferentna jednačina

$$x_{n+1} = px_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

gdje je $0 < p < 1$ i λ je realni parametar. Za svaku realnu vrijednost parametra λ , postoji jedinstvena hiperbolička fiksna tačka

$\bar{x} = \bar{x}(\lambda) = \frac{\lambda}{1-p}$. Stabilnost ekvilibrijuma $\bar{x}(\lambda)$ je ista kao stabilnost ekvilibrijuma $\bar{x}(0)$.

1.2 Slučaj nehiperboličke fiksne tačke

Pretpostavimo da je f monotono preslikavanje sa $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, i $f''(0) \neq 0$. Onda, perturbirano preslikavanje $F(\lambda, x)$ zadovoljava

$$F(0, x) = f(x) \text{ i } b(\lambda) = \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, 0) \approx \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = f'(0) \neq 1, \text{ i } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = f''(0)$$

takvo da je

$$F(\lambda, x) \approx F(\lambda, 0) + x + f''(0)x^2,$$

za $|\lambda|$ dovoljno malo. Približna perturbirana jednačina u ovom slučaju je

$$x_{n+1} = F(\lambda, 0) + x_n + f''(0)x_n^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

Ako postoji funkcija $p(\lambda)$, takva da je $p(0) = 0$, koja odgovara ekstremnoj vrijednosti $F(\lambda, x) - x$ zadovoljavajući uslove:

$p(\lambda)f''(0) < 0 \Rightarrow$ *dvije fiksne tačke od F*

$p(\lambda)f''(0) = 0 \Rightarrow$ *jedna fiksna tačka od F*

$p(\lambda)f''(0) > 0 \Rightarrow$ *nema fiksne tačke od F*

za $|\lambda|$ dovoljno malo.

Primjer 3. Diferentna jednačina

$$x_{n+1} = \lambda + x_n + x_n^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

može se posmatrati kao pertrubacija diferentne jednačine

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

u dovoljno maloj okolini nule tako da funkcija $f(x) = x + x^2$ je monotona. Možemo uzeti da je $p(\lambda) = \lambda$. Dakle, za $\lambda < 0$ imamo dva rješenja ravnoteže; kada je $\lambda = 0$ imamo jedno rješenje ravnoteže; i za $\lambda > 0$ jednačina (4) nema rješenja ravnoteže.

Slično, možemo naći primjere gdje je $f''(0) = 0$ ali $f'''(0) \neq 0$ i gdje će kubni uslovi uticati na stabilnost rješenja ravnoteže.

Primjer 3. je prikazao opštu situaciju gdje su fiksne tačke nastale kada parametar λ prolazi kroz neke kritične vrijednosti. Ovaj tip bifurkacija je jedan od dva koja se najčešće pojavljuju u jednodimenzionalnim preslikavanjima i naziva se *sedlasta* ili *tangentna bifurkacija*.

Klasični primjer je sljedeći.

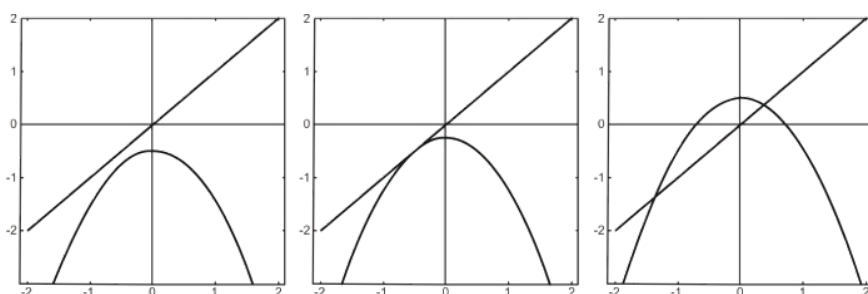
Primjer 4. Odrediti rješenja ravnoteže diferentne jednačine

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

i diskutujte njihovo postojanje. Fiksne tačke jednačine (5) su

$$\bar{x}_\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}. \quad (6)$$

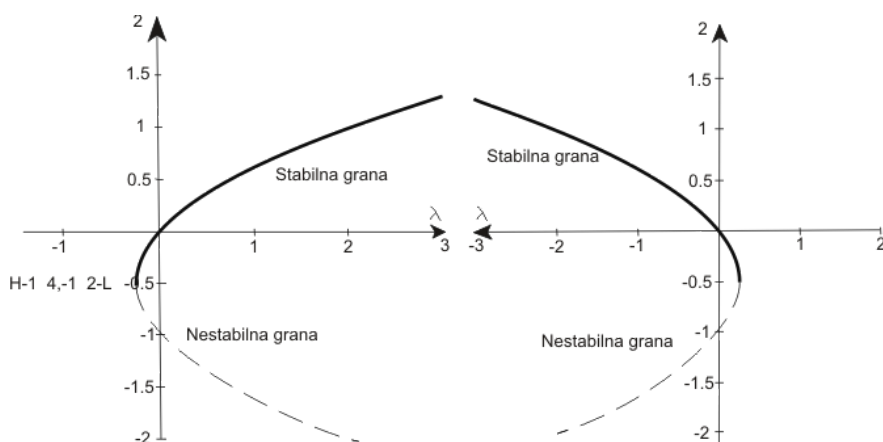
Iz jednačine (6) slijedi da za $\lambda < -\frac{1}{4}$ jednačina (5) nema fiksnih tački. Kada $\lambda = -\frac{1}{4}$ ima tačno jednu fiksna tačku $\bar{x}_{-1/4} = -\frac{1}{2}$. Kada je $\lambda > -\frac{1}{4}$ jednačina (5) ima dvije fiksne tačke date formulom (6). Ova tri slučaja predstavljena su na slici 1.



Slika 1. Grafik familije funkcija $F(\lambda, x) = \lambda - x_n^2$ dok parametar λ prolazi kroz vrijednost $\lambda = -\frac{1}{4}$.

Tačka $(\lambda, x) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ je tačka bifurkacije za preslikavanje $F(\lambda, x) = \lambda - x_n^2$ jer se broj fiksnih tačaka $N(\bar{x}_\lambda)$ mijenja u okolini bifurkacione vrijednosti parametra $\lambda = -\frac{1}{4}$.

Ova bifurkacija se nekada naziva i tangenta bifurkacija, a predstavljena je na slici 2. Odnosno, ova bifurkacija opisuje generalni scenario kada dvije fiksne tačke preslikavanja $F(\lambda, x)$, jedna stabilna i jedna nestabilna, nastale kada se parametar λ povećava ili smanjuje prolazeći kroz kritičnu vrijednost λ_0 . Termin „sedlasta“ nastaje iz sličnog tipa bifurkacije u dvodimenzionalnim preslikavanjima, gdje je nestabilna fiksna tačka sedlasta a stabilna fiksna tačka je privlačna (atraktor) ili „čvor“.



Slika 2. Dijagram bifurkacije familija funkcija $F(\lambda, x) = \lambda - x^2$ (odnosno $F(\lambda, x) = -\lambda - x^2$) kada parametar λ prolazi kroz kritičnu vrijednost $\lambda = -\frac{1}{4}$ (odnosno $\lambda = \frac{1}{4}$). Postoje dvije grane fiksnih tački koje potiču iz tačke $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ (odnosno $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$), jedna stabilna i jedna nestabilna.

Sljedeći teorem opisuje uslove koji impliciraju postojanje tangentne bifurkacije.

Teorem 1. Neka je $F : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ jednoparametarska familija jednodimenzijskih C^2

$$F(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) = \bar{x}_{\lambda_0}, \text{ i } \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) = 1, \quad (7)$$

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) \neq 0, \text{ i } B = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) \neq 0. \quad (8)$$

Onda dvije krive fiksnih tački, jedna stabilna i jedna nestabilna mnogostrukost, koje prolaze kroz tačku $(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0})$. Fiksa tačka postoji za $\lambda > \lambda_0$ ako $AB < 0$ i za $\lambda < \lambda_0$ ako $AB > 0$.

Dokaz: Definišimo novu funkciju $G(\lambda, x) = F(\lambda, x) + \lambda - x$. Iz uslova (7) i (8) za $F(\lambda, x)$ imamo da G zadovoljava uslove:

$$G(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) = \lambda_0, \quad \frac{\partial G}{\partial x}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) = 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) = A, \quad i \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) = 1 + B$$

Koristeći teorem implicitne funkcije, prvi i zadnji od ovih uslova za funkciju G sadrži i uslov za egzistenciju jedinstvene C^2 funkcije $p(x)$ za x u okolini $\bar{x}_{\lambda_0}$, sa osobinama

$$p(\bar{x}_{\lambda_0}) = \bar{x}_{\lambda_0} \quad i \quad G(p(x), x) = p(x).$$

Druga jednačina odgovara $F(p(x), x) = p(x)$.

Diferenciranjem ove jednačine i računajući je za $(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0})$ dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) + \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0})p'(\bar{x}_{\lambda_0}) = 1,$$

što implicira da je $p'(\bar{x}_{\lambda_0}) = 0$. Dakle funkcija $p(x)$ ima kritičnu tačku za $x = \bar{x}_{\lambda_0}$. Uzimajući drugi izvod jednačine $F(p(x), x) = p(x)$

po x i računajući ga u tački $(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0})$ dobijamo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) + \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0})p''(\bar{x}_{\lambda_0}) = 0,$$

$$\text{da je } Bp''(\bar{x}_{\lambda_0}) + A = 0 \quad i \quad p''(\bar{x}_{\lambda_0}) = -\frac{A}{B}.$$

$Bp''(\bar{x}_{\lambda_0}) + A = 0 \quad i \quad p''(\bar{x}_{\lambda_0}) = -\frac{A}{B}$. Stoga $AB < 0$ znači da je $p''(\bar{x}_{\lambda_0}) > 0$ i da $p(x)$ dostiže minimum u $x = \bar{x}_{\lambda_0}$. Crtajući putanju $(p(x), x)$ u (λ, x) – ravni zaključujemo da za $AB < 0$ putanja $p(x)$ otvara se na desno, kao na slici 2. Ako je $AB < 0$ putanja je obrnuta kao na slici 2.

Dokažimo stabilnost grana. Diferencirajući jednačinu

$F(p(x), x) = x$ po x , dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 1 - \frac{\partial F}{\partial \lambda} p'(x). \quad (9)$$

Kako $p(x)$ dostiže svoj minimum u $x = \bar{x}_{\lambda_0}$ onda postoji $\delta_1 > 0$ takvo da je $p'(x) < 0$ za

$x \in (\bar{x}_{\lambda_0} - \delta_1, \bar{x}_{\lambda_0})$ i $p'(x) > 0$ za $x \in (\bar{x}_{\lambda_0}, \bar{x}_{\lambda_0} + \delta_1)$. Osim toga u uslovu (8) postoji $\delta_2 > 0$

takvo da je $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, x) \neq 0$ za $x \in (\bar{x}_{\lambda_0} - \delta_2, \bar{x}_{\lambda_0} + \delta_2)$. Uzmimo da je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Onda jednačina (9) implicira da za

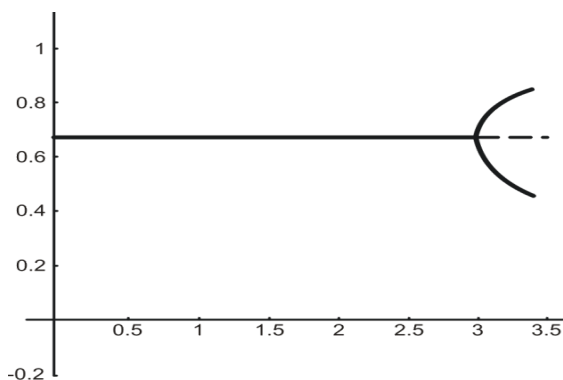
$B > 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} < 1$ (fiksna tačka je stabilna) kada $x \in (\bar{x}_{\lambda_0}, \bar{x}_{\lambda_0} + \delta)$ i $\frac{\partial F}{\partial x} > 1$ (fiksna tačka je nestabilna) kada $x \in (\bar{x}_{\lambda_0} - \delta, \bar{x}_{\lambda_0})$.

Slično, za $B > 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} > 1$ (fiksna tačka je nestabilna) kada $x \in (\bar{x}_{\lambda_0}, \bar{x}_{\lambda_0} + \delta)$ i $\frac{\partial F}{\partial x} < 1$ (fiksna tačka je stabilna) kad $x \in (\bar{x}_{\lambda_0} - \delta, \bar{x}_{\lambda_0})$.

1.3 Bifurkacija udvostručenja perioda

U ovom dijelu ispitat ćemo važnu bifurkaciju na nehiperbolički ekvilibrijum $\bar{x}$ sa $f'(\bar{x}) = -1$ i šta će se desiti kada se f perturbira.

Kako smo vidjeli ranije, kada $f'(\bar{x}) < 0$, preslikavanje ff je oscilatorno u nekoj okolini tačke $\bar{x}$. Ako tačka ravnoteže $\bar{x}$ postane nestabilna, putanja ne može da pristupi $\bar{x}$. Međutim, ako putanja ostane ograničena, moguće je da parne iteracije konvergiraju ka nekoj graničnoj vrijednosti, recimo p , i neparne iteracije konvergiraju ka $q = f(p) \neq p$. U tom slučaju će biti $f^2(p) = p$ sa $f(p) \neq p$, i onda je pp periodična tačka sa primarnim periodom 2. Ova bifurkacija se naziva *bifurkacija udvostručenja perioda*. Tipični dijagram bifurkacije ove važne bifurkacije je prikazan na slici 3.



Slika 3. Dijagram bifurkacije udvostručenja perioda logističkog preslikavanja

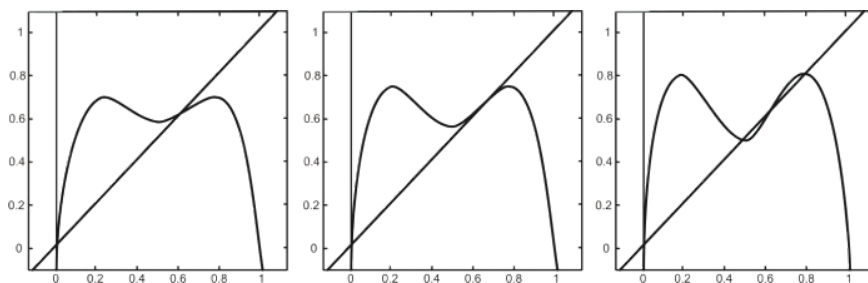
$F(\lambda, x) = \lambda x(1 - x)$ kada λ prolazi kroz vrijednost $\lambda = 3$. Gornja grana

rješenja dvostrukog perioda ima jednačinu $\frac{1}{2} \frac{p+1+\sqrt{-3-2p+p^2}}{p}$ i donja

grana rješenja dvostrukog perioda ima jednačinu $\frac{1}{2} \frac{p+1-\sqrt{-3-2p+p^2}}{p}$.

Debele krive su stabilne u odgovarajućem rasponu parametra dok isprekidane krive su nestabilne.

S obzirom na činjenicu da rješenje udvostručenja perioda je fiksna tačka druge iteracije preslikavanja dovoljno je posmatrati drugu iteraciju preslikavanja u bifurkaciji udvostručenja perioda. Grafik druge iteracije familije funkcija $F(\lambda, x)$, kada parametar λ prolazi kroz kritičnu vrijednost, je prikazan na slici 4.



Slika 4. Grafik druge iteracije familije funkcija

$F(\lambda, x) = \lambda x(1 - x)$ kada parametar λ prolazi kroz vrijednost $\lambda = 3$. Vrijednost λ je 2.8, 3, i 3.2 na gornjim slikama s lijeva na desno.

Sljedeći teorem tvrdi da bifurkacija udvostručenja perioda se događa za tipične perturbacije nehiperboličkog ekvilibrijuma $\bar{x}$ sa $f'(\bar{x}) = -1$.

Teorem 2. Neka $f(x)$ bude C^3 funkcija sa fiksnom tačkom koja zadovoljava sljedeće uslove:

$$(a) f(0) = 0, \quad f'(0) = -1;$$

$$(b) [f^2(0)]''' \neq 0.$$

Posmatrajući jednoparametarsku perturbaciju $F(\lambda, x)$ od $f(x)$ sa

$$(c) F(0, x) = f(x), \quad F(\lambda, 0) = 0,$$

$$(d) \frac{\partial F(\lambda, 0)}{\partial x} = -1 - \lambda.$$

Onda postoji okolina $(\lambda, x) = (0, 0)$, u kojoj, za svaku vrijednost λ sa $\lambda[f^2(0)]''' < 0$, postoji jedinstvena periodična orbita $\{p_\lambda, F(\lambda, p_\lambda)\}$ primarnog perioda 2 perturbacije $F(\lambda, x)$, koja je asimptotski stabilna (odnosno nestabilna) ako je izvorno nestabilna (odnosno asimptotski stabilna). Osim toga, za vrijednosti λ sa $\lambda[f^2(0)]''' > 0$, ne postoji periodična orbita primarnog perioda 2.

Dokaz: Periodične tačke udvostručenja perioda preslikavanja $F(\lambda, x)$ su fiksne tačke druge iteracije $F^2(\lambda, x) = F(\lambda, F(\lambda, x))$, to jest, nule od $F^2(\lambda, x) - x$. S obzirom na uslov (c), $x = 0$ je nula ove jednačine sa primarnim periodom 1. Ovo implicira da će Taylor-ov razvoj funkcije $F^2(\lambda, x) - x$ imati oblik:

$$F^2(\lambda, x) - x = xG(\lambda, x),$$

gdje je $G(\lambda, x)$ adekvatna funkcija, čije ponašanje će odlučiti karakter bifurkacije naše jednačine.

Sada ćemo odrediti prvih nekoliko članova Taylor-ovog razvoja funkcije $F^2(\lambda, x) - x$. Svi izvodi koji će se pojaviti bit će u zavisnosti

od x .

$$(F^2(\lambda, x))' = F'(\lambda, F(\lambda, x))F'(\lambda, x),$$

$$(F^2(\lambda, x))'' = F''(\lambda, F(\lambda, x))(F'(\lambda, x))^2 + F'(\lambda, F(\lambda, x))F''(\lambda, x).$$

U slučaju kada je $x = \lambda = 0$, dobijemo:

$$(F^2(0,0))' = (f^2(0))' = 1, \quad (F^2(0,0))'' = (f^2(0))'' = 0.$$

Sada, Taylor-ov razvoj funkcije $F^2(\lambda, x)$ u tački $(0,0)$ je dat sa:

$$F^2(\lambda, x) = (1 + \lambda)^2 x + \frac{a_2(\lambda)}{2} x^2 + \frac{a_3(\lambda)}{6} x^3 + \dots,$$

gdje funkcije $a_2(\lambda)$ i $a_3(\lambda)$ zadovoljavaju uslove

$$a_2(0) = 0, \quad a_3(0) = (f^2(0))'''.$$

Prema tome Taylor-ov razvoj koji nas interesuje postaje

$$F^2(\lambda, x) - x = xG(\lambda, x)$$

gdje je

$$G(\lambda, x) = \lambda(\lambda + 2) + \frac{a_2(\lambda)}{2} x^2 + \frac{a_3(\lambda)}{6} x^3 + R(\lambda, x),$$

sa $a_2(0) = 0$ i za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ i $\mu > 0$ takvi da funkcija R zadovoljava uslove

$$|R(\lambda, x)| < \varepsilon x^2, \quad \text{za } |\lambda| < \delta \quad \text{i} \quad |x| < \mu.$$

Sada ćemo pokazati da funkcija $G(\lambda, x)$ kao funkcija od x u okolini $x = 0$ za svako malo λ ima grafik koji je otprilike parabola. Ovo će biti postignuto pokazivanjem postojanja jedinstvene ekstremne tačke funkcije $G(\lambda, x)$, kao funkcije od x , u okolini tačke $x = 0$ za malo λ .

Ekstremna tačka funkcije G se nalazi među rješenjima x jednačine:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\lambda, x) = 0, \tag{10}$$

Neka je

$$H(\lambda, x) = \frac{\partial G}{\partial x}(\lambda, x) = \frac{a_2(\lambda)}{2} + \frac{a_3(\lambda)}{6}x + \frac{\partial R}{\partial x}(\lambda, x).$$

Onda imamo

$$H(0,0) = 0 \quad i \quad \frac{\partial H}{\partial x}(0,0) = f''(0) \neq 0.$$

Prema teoremu implicitnih funkcija slijedi da postoje konstante $\delta_1 > 0$ i $\mu_1 > 0$, i C^1 funkcija $g(\lambda)$ definisana za $|\lambda| < \delta_1$ takvo da je $g(0) = 0$ i $H(\lambda, g(\lambda)) = 0$, to jest,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\lambda, g(\lambda)) = 0.$$

Osim toga, svako rješenje (λ, x) jednačine (10) sa $|\lambda| < \delta_1$ i $|x| < \mu_1$ je dato sa $x = g(\lambda)$.

Za svako fiksno λ , funkcija $G(\lambda, x)$ ima minimum u $x = g(\lambda)$ ako je $(f^2(0))''' > 0$ ili maksimum ako je $(f^2(0))''' < 0$. Broj nula funkcije $G(\lambda, x)$ zavisi od ekstremne vrijednosti funkcije $G(\lambda, g(\lambda))$. Ako je $\lambda(f^2(0))''' > 0$, onda funkcija $G(\lambda, x)$ nema nula. Ako je $\lambda(f^2(0))''' < 0$, onda funkcija $G(\lambda, x)$ ima dvije nule koje odgovaraju jednom rješenju dvostrukog perioda $\{p(\lambda), F(\lambda, p(\lambda))\}$.

Napomena: Specijalni slučaj globalno bifurkacionog rezultata se može dobiti za opštu diferentnu jednačinu drugog reda oblika

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

kada funkcija f zadovoljava izvjesne uslove monotonosti koji garantuju egzistenciju i stabilnost osnovnog rješenja perioda dva za kritičnu vrijednost parametra. U slučaju bifurkacije udvostručenja perioda, koja je izučavana u ovom radu, tipični događaj se dešava u sistemu nelinearnih diferentnih jednačina kada promjena parametra ili parametara uzrokuje da svojstvena vrijednost karakteristične

jednačine pridružena lineariziranoj jednačini u ekvilibrijumu prolazi kroz -1. U tom slučaju tipični ekvilibrijum gubi stabilnost a stabilna orbita perioda dva se pojavljuje. Nastavljajući mijenjanje parametra možemo dobiti kao rezultat kaskade bifurkacije udvostručenja perioda i početak haosa.

1.4 Transcritical i Pitchfork bifurkacija

Tangenta bifurkacija i bifurkacija udvostručavanja perioda su dvije tipične bifurkacije kojima odgovaraju dva opšta slučaja gdje nagib postaje +1 (sedlasta ili tangenta bifurkacija) ili -1 (obrnuta ili bifurkacija udvostručavanja perioda) u fiksnoj tački. Kažemo da su ovi tipovi bifurkacija opšti. Dodavajući specijalne simetrije ili ograničenja na funkcije dobivaju se ostali tipovi bifurkacija. Posmatramo dva tipa koja se mogu pojaviti sa $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) = 1$. Sljedeći rezultat opisuje generalnu situaciju u jednom slučaju.

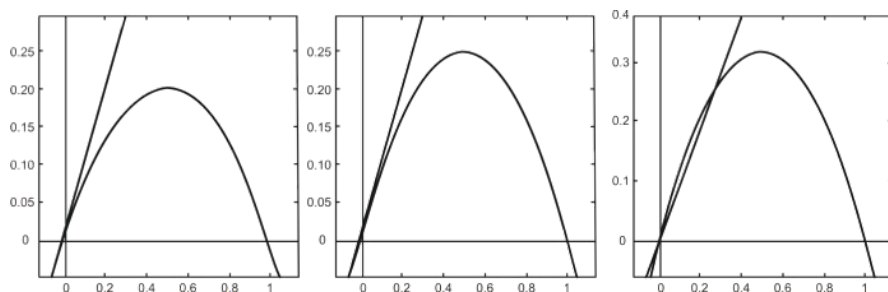
Teorema 3. (Transcritical bifurkacija) *Neka je $F : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ jednoparametarska familija jednodimenzionalnih C^2*

$$F(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) = \bar{x}_{\lambda_0}, \quad i \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) = 1, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) > 0, \quad i \quad \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) \right) > 0. \quad (12)$$

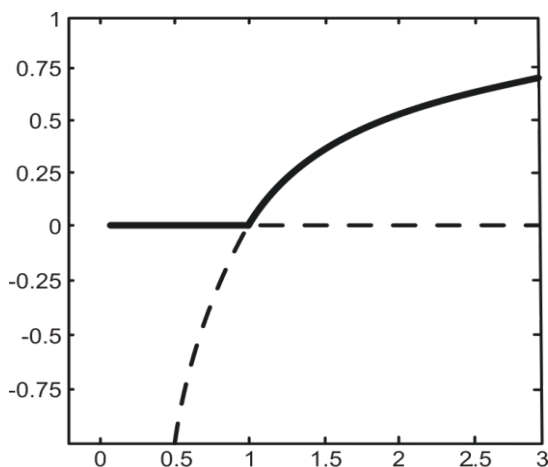
Onda $F(\lambda, x)$ ima dvije grane fiksni tački za λ blizu λ_0 . Prva grana je $x = \bar{x}_{\lambda_0}$ za sve λ , i druga grana zadovoljava $x_2(\lambda) \neq \bar{x}_{\lambda_0}$, ako $\lambda \neq \lambda_0$ i $x_2(\lambda_0) \neq \bar{x}_{\lambda_0}$. Prva grana $x = \bar{x}_{\lambda_0}$ je stabilna ako je $\lambda > \lambda_0$, dok fiksne tačke na drugoj grani $x(\lambda)$ imaju suprotnu stabilnost.

Bifurkacija koja zauzima mjesto u logističkoj jednačini $\lambda = 1$ je transcritical bifurkacija. Ovaj fenomen je predstavljen na slici 5.



Slika 5. The transcritical bifurkacija fiksne tačke $1 - 1/\lambda$ familije logističkih funkcija $F(\lambda, x) = \lambda x(1 - x)$ dok parametar λ prolazi kroz vrijednost $\lambda = 1$. Vrijednosti λ su 0.8, 1 i 1.3 u gornjim slikama sa lijeva na desno.

Familija logističkih funkcija $F(\lambda, x) = \lambda x(1 - x)$, $\lambda > 0$ ima tačno dvije fiksne tačke 0 i $1 - 1/\lambda$, osim $\lambda = 1$, kada se ove dvije fiksne tačke podudaraju. Za ovu vrijednost λ , fiksna tačka 0 gubi stabilnost (postaje nestabilna) i druga fiksna tačka $1 - 1/\lambda$ postaje atraktor. Pojam transcritical se koristi da naglasi mijenjanje stabilnosti ove dvije putanje fiksnih tački koje se susreću u kritičnoj vrijednosti parametra. Dijagram bifurkacije za logistički familiju, koji je tipičan za ovu situaciju, je dat na slici 6.



Slika 6. Transcritical bifurkacijski dijagram fiksnih tačaka za logističko preslikavanje $F(\lambda, x) = \lambda x(1 - x)$ kada λ prolazi kroz vrijednost $\lambda = 1$. Debele krive su stabilne i odgovaraju rasponu parametara dok isprekidane krive su nestabilne. Postoji promjena stabilnosti dvaju fiksnih tačaka za $\lambda = 1$.

Primijetimo da promjena smjera nejednakosti u prvom uslovu (12) mijenja nagib od $\frac{dx}{d\lambda}$ druge grane iz negativnog u pozitivan. Druga vrsta ograničenja na familiju funkcija je ta da je to neparna funkcija uzimajući u obzir parametar λ , na primjer, $F(-\lambda, x) = -F(\lambda, x)$. U ovom slučaju imamo sljedeći rezultat.

Teorem 4. (Pitchfork bifurkacija) Neka je $F : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ jednoparametarska familija jednodimenzijskih $\mathcal{C}^2$

$$F(-\lambda, x) = -F(\lambda, x), \text{ i } \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) = 1, \quad (13)$$

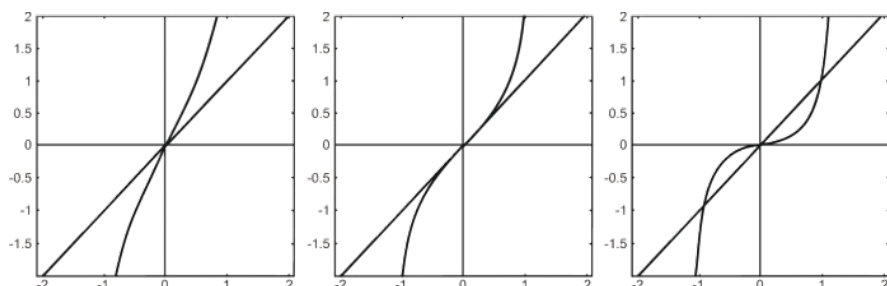
$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) < 0, \text{ i } \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) \right) > 0. \quad (14)$$

Onda postoje intervali $(\lambda_-, \lambda_0), (\lambda_0, \lambda_+)$ i $\delta > 0$ takvo da je

1. ako je $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_0)$, onda $F(\lambda, x)$ ima jednu fiksnu tačku u $\bar{x}_{\lambda_0} \in (\bar{x}_{\lambda_0} - \delta, \bar{x}_{\lambda_0} + \delta)$,
2. ako je $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_+)$, onda $F(\lambda, x)$ ima tri fiksne tačke za svako $\bar{x}_{\lambda_0} \in (\bar{x}_{\lambda_0} - \delta, \bar{x}_{\lambda_0} + \delta)$.

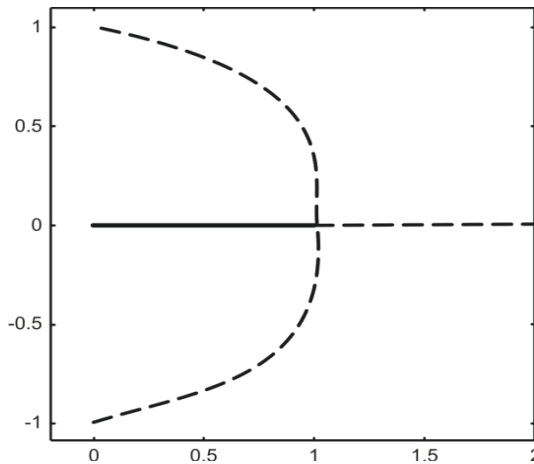
Fiksna tačka $\bar{x}_{\lambda_0}$ je nestabilna dok su ostale dvije fiksne tačke stabilne.

Bifurkacija koja se dešava u familiji preslikavanja $F(\lambda, x) = \lambda x + x^5$ u $\lambda = 1$ naziva se Pitchfork bifurkacija. Ilustracija ovog fenomena je prikazana na slici 7. Ova familija funkcija ima jednu fiksnu tačku za $\lambda \leq 1$ i tri fiksne tačke za $\lambda > 1$.



Slika 7. Pitchfork bifurkacija familije funkcija $F(\lambda, x) = \lambda x + x^5$ dok parametar λ prolazi kroz vrijednost $\lambda = 1$. Vrijednosti λ su 2, 1 i 0.2 u gornjima slikama s lijeva na desno.

Dijagram bifurkacije za familiju funkcija $F(\lambda, x) = \lambda x + x^5$ koji je tipičan za ovu situaciju je dat na slici 8.



Slika 8. Dijagram Pitchfork bifurkacije fiksnih tačaka za familiju preslikavanja

$F(\lambda, x) = \lambda x + x^5$ dok λ prolazi kroz vrijednost $\lambda=1$. Debele krive su stabilne u odgovarajućim parametarskom rasponu dok su isprekidane krive nestabilne. Postoji promjena stabilnosti u fiksnim tačkama 0 i porijeklo dvije fiksne tačke u $\lambda = 1$.

Sumirat ćemo rezultate o tipovima bifurkacija u obliku tabele 1. Bazirano na teoriji stabilnosti koju smo do sad izgradili, bifurkacije mogu nastati kada izvod postane 1 ili -1. Tangentna i bifurkacija dvostručenja perioda su tipične bifurkacije, jer ne trebaju dodatne uslove na početku bifurkacije. Pitchfork Bifurkacija se može desiti samo ako je drugi uslov i uslov (14) zadovoljen. Treba naglasiti da varijacije ponašanja koje se mogu desiti u neizvornim bifurkacijama su vjerovatno beskonačne. Transcritical i Pitchfork bifurkacija su vjerovatno dva najčešća tipa.

Tip	$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0})$	Fiksna tačka	$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0})$	$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0})$
Tangentni	1	$F(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) = \bar{x}_{\lambda_0}$	$\neq 0$	$\neq 0$
Period-udvostručenja	-1	$F(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) = \bar{x}_{\lambda_0}$	$\neq 0$	$\neq 0$
Transcritical	1	$F(\lambda, \bar{x}_{\lambda_0}) = \bar{x}_{\lambda_0}$	0	$\neq 0$
Pitchfork	1	$F(-\lambda, x) = -F(\lambda, x)$	0	$0 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\lambda_0, \bar{x}_{\lambda_0}) \neq 0$

Tabela 1. Tabela tipičnih bifurkacija za jednodimenzionalna preslikavanja

1.5 Bifurkacije logističkih preslikavanja

Posmatrajmo logističku jednačinu oblika:

$$x_{n+1} = f(\lambda, x_n) = \lambda x_n(1 - x_n), \quad \lambda > 1 \quad n = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Kao što je poznato jednačina (15) ima dva ekvilibrija

$\bar{x} = 0$ i $\bar{x}_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Ako je $1 < \lambda < 4$, onda $x_n \in (0, 1)$ ako

$x_0 \in (0, 1)$ i nula ekvilibrijum je nestabilan. Ukoliko je $1 < \lambda < 2$ onda nakon barem jednog člana rješenje konvergira monotono ka

$\bar{x}_\lambda$. Ako $2 < \lambda < 3$, onda rješenje konvergira oscilatorno ka $\bar{x}_\lambda$.

Prijetimo da je

$$f'(\lambda, 0) = \lambda, \quad i \quad f'(\lambda, \bar{x}_\lambda) = 2 - \lambda. \quad (16)$$

Ako je $\lambda = 3$, onda nula ekvilibrijum je nestabilan, a stabilnost pozitivnog ekvilibrija $\bar{x}_\lambda$ ne može biti određena iz teorema Linearizirane stabilnosti kada je $f'(\lambda, \bar{x}_\lambda) = -1$, a što sugerira da $T = 3$ je moguća vrijednost bifurkacije.

Ako je $3 < \lambda_1 + \sqrt{6}$, onda nula ekvilibrijum i pozitivni ekvilibrijum $\bar{x}_\lambda$ su istovremeno nestabilni, ali sve iteracije rješenja ostaju u intervalu $(0, 1)$. U ovom intervalu parametara također imamo jedinstveno periodično rješenje minimalno dvostrukog perioda. Prema tome, shvatljivo je da kako se λ povećava kroz vrijednost 3, pozitivni ekvilibrijum $\bar{x}_\lambda$ biva podvrgnut bifurkaciji udvostručenja perioda dajući porast asimptotski stabilnim periodičnim rješenjima minimalno dvostrukog perioda.

Sada želimo utvrditi postojanje bifurkacije udvostručenja perioda koristeći teorem 2. Da bi smo mogli da primijenimo teorem 2., translahirat ćemo rješenje $\bar{x}_\lambda$ i vrijednost bifurkacije λ ka 0. Transformacijama

$$y = x - \bar{x}_\lambda = x - 1 + \frac{1}{\lambda}, \quad \mu = \lambda - 3, \quad (17)$$

dovodimo logističku funkciju na oblik

$$f(\mu, y) = -(1 + \mu)y - (3 + \mu)y^2.$$

Odgovarajuća diferentna jednačina je

$$y_{n+1} = f(\mu, y_n). \quad (18)$$

Ova funkcija može biti posmatrana kao jednoparameterska perturbacija

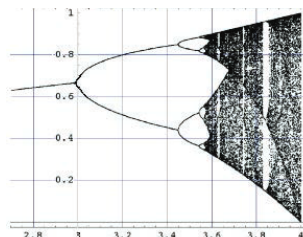
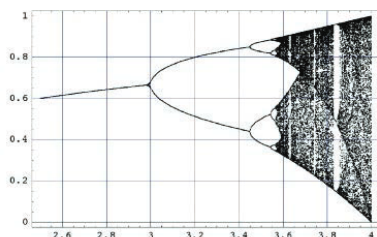
$$f(0, y) = -y - 3y^2,$$

pa jednačinu (18) možemo posmatrati kao perturbaciju od

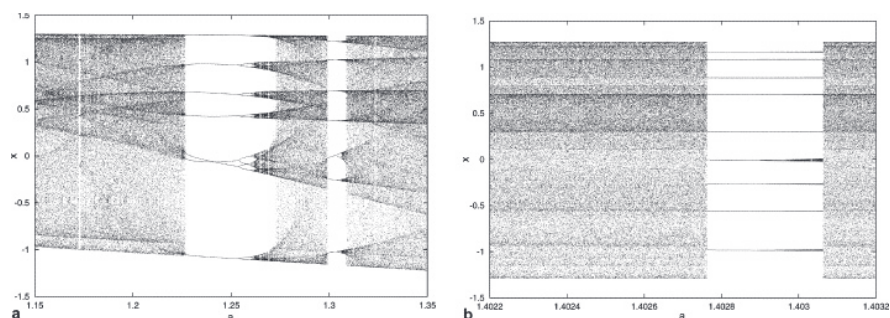
$$y_{n+1} = f(0, y_n) = -y_n - 3y_n^2. \quad (19)$$

Fiksna tačka $\tilde{x} = 0$ je nehiperbolička sa $f'(0) = -1$. Izvor je asimptotski stabilan, kao što možemo vidjeti posmatrajući drugu iteraciju preslikavanja $f^2(x) = x - 18x^3 - 27x^4$. Očigledno da je $(f^2(0))''' = -108$, i tako su svi uslovi teorema 2. zadovoljeni. Kao posljedica toga, za svaku malu pozitivnu vrijednost μ , to jest za svaku vrijednost λ u malom intervalu na desno od 3, postoji jedinstvena periodička orbita minimalno dvostrukog perioda koja je asimptotski stabilna.

Sljedeće dvije slike su dijagrami bifurkacije za različite vrijednosti parametra λ predstavljaju način kako od perioda udvostručenja se može doći do haosa za logističko preslikavanje.



Slika 9. Dijagram bifurkacije za logističku jednačinu prikazuje put od udvostručavanja perioda do kaosa.



Slika 10. Dijagram bifurkacije za logističku jednačinu, prikazuje stvaranje rješenja perioda 7.

Literatura

- Dž. Burgić, S. Kalabušić and M. R. S. Kulenović, *Global Non-hyperbolic Dynamics for Competitive Systems in the Plane and Global Period-doubling Bifurcation of Second Order Difference Equations*, Advances in Dynamical Systems and Applications, 3(2008)
- E. A. Grove and G. Ladas, *Periodicities in Differentne Equations*, CRC Press, Boca Raton, London, New York 2005.
- E. A. Grove, M. R. S. Kulenović and G. Ladas, *Periodicities in Nonlinear Difference Equations*, CRC Press, Boca Raton, London, New York 2005.
- J. K. Hale and H. Kocak, *Dynamics and Bifuracation*, Speinger-Verlag, New York, Berlin, Tokyo 1991.
- K. T. Alligood, T. Sauer and J. A. Yorke, *CHAOS An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Tokyo 1997.
- M. Hirsc and H. Smith, *Monotone Dynamical Systems*, Handbook of Differential Equations (second volumen), Amsterdam 2005.
- S. Elaydi, *Discrete Chaos*, Chapman and Hall-CRC, Boca Raton, London 2000.
- S. N. Chow and J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1982.