

Almir Huskanović
Hermina Alajbegović

ODREĐIVANJE MAKSIMUMA PROIZVODA I MINIMUMA ZBIRA POZITIVNIH BROJEVA

Sažetak

Ponekad se minimum ili maksimum funkcije može lako izračunati pomoću nekoliko teorema koji su direktna posljedica teorema o odnosu aritmetičke i geometrijske sredine pozitivnih brojeva. U ovom radu mi ćemo formulirati pomenute teoreme, te ćemo kroz nekoliko primjera pokazati njihovu moguću primjenu.

Ključne riječi: *maksimum funkcije, minimum funkcije, nejednakosti, odnos aritmetičke i geometrijske sredine pozitivnih brojeva*

MAXIMUM OF THE PRODUCT AND MINIMUM OF THE SUM OF POSITIVE NUMBERS

Summary

Sometimes the minimum or maximum function can be easily calculated using several theorems which are a direct consequence of Theorem about arithmetic and geometric mean inequality. In this paper, we will formulate the aforementioned theorems, and we will show you a few examples of their applications.

Keywords: *maximum function, minimum function, inequalities, the geometric and arithmetic mean of positive numbers inequality*

Ova tema je zgodna za rad sa učenicima srednje škole, nadarenim za matematiku. Na časovima dodatne nastave iz matematike učenici se često bave nejednakostima. Poznat nam je odnos aritmetičke i geometrijske sredine n pozitivnih brojeva:

$$(1) \quad \boxed{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbf{N})}$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako su svi brojevi x_i međusobno jednaki, $i = 1, 2, \dots, n$.

Pretpostavimo da je zbir na lijevoj strani u (1) konstantan, tj.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = c = \text{const.}$$

Jasno je da tada izraz $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, pa time i proizvod $x_1 x_2 \dots x_n$ može postići svoju najveću vrijednost, ukoliko u (1) vrijedi znak jednakosti. Time je dokazan

Teorem 1: Ako je zbir nekoliko pozitivnih promjenljivih konstantan, njihov proizvod je maksimalan kada su te promjenljive međusobno jednake, ukoliko one to mogu postati.

Analogno, ukoliko je $x_1 x_2 \dots x_n = c = \text{const.}$, iz (1) slijedi da tada zbir $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ može dostići svoju najmanju vrijednost. Tačnije, vrijedi

Teorem 2: Ako je proizvod nekoliko pozitivnih promjenljivih konstantan, njihov zbir je minimalan kada su te promjenljive međusobno jednake, ukoliko one to mogu postati.

U sljedećim zadacima ilustrujemo metodu koja se zasniva na teoremima 1 i 2.

1. Naći maksimalnu vrijednost funkcije $y = x - x^2$, $x \in \mathbf{R}$.

Jasno je da učenici mogu lako naći maksimum ove funkcije, standardnom metodom za nalaženje ekstrema kvadratne funkcije (građivo 2. razreda srednje škole) ili pomoću izvoda funkcije (4. razred srednje škole). Međutim, ovdje ćemo iskoristiti teorem 1.

Zapazimo najprije da je $x - x^2 = x(1 - x) > 0$ ako je $x \in (0, 1)$.

Osim toga, $x \in (0, 1) \Rightarrow 1 - x > 0$,

dakle oba faktora x i $(1 - x)$ su pozitivni. Njihov proizvod će biti najveći mogući ako su oni

jednaki, tj. $x = 1 - x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Tada je $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Dakle,

$$\max_{x \in \mathbf{R}} y = \frac{1}{4}.$$

2. Dokazati da bar jedan od proizvoda $(1 - a)b$, $(1 - b)c$, $(1 - c)a$,

pri čemu je $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$, ne može biti veći od $\frac{1}{4}$.

Pretpostavimo da ova tvrdnja nije tačna, tj. svaki od nabrojanih proizvoda je veći od $\frac{1}{4}$. Tada je očito $(1 - a)b \cdot (1 - b)c \cdot c(1 - c)a > \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$.

No, s obzirom na zadatak br. 1, očito je

$$(1 - a)b(1 - b)c(1 - c)a = a(1 - a)b(1 - b)c(1 - c) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}.$$

Zbog toga zaključujemo da je tačna tvrdnja zadatka.

3. Naći maksimalnu vrijednost izraza:

$$f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7), \text{ ako je } x \in [3, 4].$$

Očito je $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(4 - x)(5 - x)(6 - x)(7 - x)$, a kad je funkcija ovako napisana, tada su svi faktori nenegativni za $x \in [3, 4]$. U proizvodu grupišimo prvi i zadnji faktor, drugi i predzadnji, itd. Tada prema teoremu 1, imamo da je:

$$x(7-x) \leq \left(\frac{7}{2}\right)^2, \text{ jer } x = 7-x \Rightarrow x = \frac{7}{2}.$$

$$(x-1)(6-x) \leq \left(\frac{7}{2}\right)^2, \text{ jer } x-1 = 6-x \Rightarrow x = \frac{7}{2}.$$

$$(x-2)(5-x) \leq \left(\frac{7}{2}\right)^2, \text{ jer } x-2 = 5-x \Rightarrow x = \frac{7}{2}.$$

$$(x-3)(4-x) \leq \left(\frac{7}{2}\right)^2, \text{ jer } x-3 = 4-x \Rightarrow x = \frac{7}{2}.$$

To znači da je $f(x) \leq \left(\frac{7}{2}\right)^8$, a postiže se za $x = \frac{7}{2} \in [3, 4]$.

4. Naći maksimum izraza:

$$z = (a-x)(b-y)(cx+dy), \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, cd > 0.$$

Najprije se data funkcija pomnoži sa cd :

$$cdz = (ac-cx)(bd-dy)(cx+dy), \quad \text{jer je tada}$$

$(ac-cx) + (bd-dy) + (cx+dy) = ac+bd = \text{const.}$ Osim toga, zbog uslova $cd > 0$, funkcije z i cdz postižu svoj maksimum za iste vrijednosti promjenljivih x i y . Dalje, postavi se sistem

jednačina: $ac-cx = bd-dy \wedge bd-dy = cx+dy$, odakle se nađe

$$x = \frac{2ac-bd}{3c}, \quad y = \frac{2bd-ac}{3d}.$$

Nakon toga, uvrštavanjem u izraz za datu funkciju nalazimo traženi maksimum od funkcije z .

$$\text{Rezultat: } \max z = \frac{(ac+bd)^3}{27cd}.$$

$$5. \text{ Naći minimum funkcije } y = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

Dijeljenjem datih polinoma dobije se da je

$$y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Očito je proizvod dobijenih

sabiraka konstantan. Osim toga ti sabirci su pozitivni, jer je

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Pomoću teorema 2 zaključuje se onda da funkcija dostiže svoj minimum ako je

$$x^2 + x + 1 = \frac{1}{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1.$$

Zaključak: $\min y = 2$.

6. Naći minimum funkcije

$$y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x}, \quad a > 0, b > 0, 0 < x < 1.$$

Data funkcija se transformira u: $y = a^2 \frac{1-x}{x} + b^2 \frac{x}{1-x} + a^2 + b^2$.

S obzirom na date uslove, svi sabirci su pozitivni, a njihov proizvod je $a^4 b^4 = \text{const}$.

Iz jednačine $a^2 \frac{1-x}{x} = b^2 \frac{x}{1-x}$ dobije se da je $x = \frac{a}{a+b}$, pa je traženi minimum $\min y = (a+b)^2$.

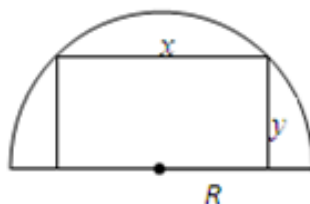
7. U polukrug poluprečnika R upisan je pravougaonik najveće moguće površine. Odrediti njegove dimenzije.

Neka su stranice pravougaonika označene sa x i y . Primjeni se Pitagorin teorem i dobije se veza između x i y : $y^2 = R^2 - \frac{x^2}{4}$.

Umjesto maksimuma funkcije $P = P(x, y)$ možemo računati maksimum funkcije $P^2 = x^2 y^2 = x^2 \left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right) = 4 \cdot \frac{x^2}{4} \left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)$, koja je napisana u obliku proizvoda 3 pozitivna faktora čiji

je zbir očito konstantan. Primjenimo teorem 1. Imamo da je

$$\frac{x^2}{4} = R^2 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = R^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{2}.$$



$$\text{Dalje slijedi da je } y^2 = R^2 - \frac{2R^2}{4} = \frac{R^2}{2} \Rightarrow y = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

9. U pravougli trougao sa katetama $a = 6$, $b = 8$ upisan je pravougaonik tako da mu jedna stranica leži na hipotenuzi. Odrediti ivice pravougaonika, ako se zna da on ima maksimalnu površinu.

Neka je x dužina stranice pravougaonika koja leži na hipotenuzi c , a y druga stranica. Najprije odredimo dužinu hipotenuze datog trougla pomoću Pitagorine teoreme $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Zato je površina pravougaonika jednaka:

Posmatrajmo trouglove ABC , CDF , AED . Oni su međusobno slični.

Iz sličnosti trouglova imamo:

$$x : CD = 10 : 8 \Rightarrow CD = \frac{4}{5}x \quad \text{i}$$

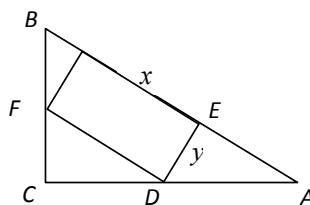
$$y : (8 - CD) = 6 : 10 \Rightarrow y = \frac{3}{5}(8 - CD) = \frac{3}{5}\left(8 - \frac{4}{5}x\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}(10 - x) = \frac{12}{25}(10 - x).$$

Površina upisanog pravougaonika je onda jednaka

$$P = \frac{12}{25}x(10 - x).$$

Ova površina je maksimalna ako je

$$x = 10 - x \Leftrightarrow x = 5, \text{ a otuda je } y = \frac{12}{5}.$$



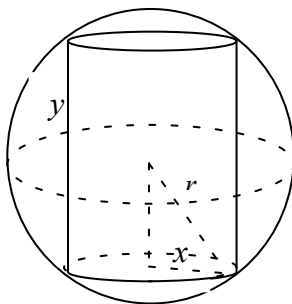
9. U sferu datog radijusa r upisati valjak najveće moguće zapremine.

Ako označimo sa x radijus baze valjka, a sa y njegovu visinu. Pomoću Pitagorinog teorema dobije se:

$$y^2 = 4(r^2 - x^2) \Rightarrow V^2 = 4\pi^2 x^4 (r^2 - x^2) - \text{kvadrat zapremine valjka.}$$

$$\text{Zatim se napiše da je } V^2 = 16\pi^2 \left[\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot (r^2 - x^2) \right].$$

$$\text{Iz } \frac{x^2}{2} = r^2 - x^2 \text{ dobije se } x = r\sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ pa zatim } y = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$



10. Funkcija $y = (10 - x^4)(15 + x^4)$ ima maksimalnu vrijednost za $x = 0$. Iako je zbir faktora konstantan, $(10 - x^4) + (15 + x^4) = 25$, ne može se postići da faktori budu jednaki, jer jednačina $(10 - x^4) = (15 + x^4) \Rightarrow x^4 = -\frac{5}{2}$ nema rješenja.

Zadaci za samostalan rad:

z1) Rastaviti broj 10 na dva sabirka tako da njihov proizvod bude najveći mogući.

z2) Naći maksimum funkcije:

a) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2, x \in [0, 3]$.

b) $y = (1-x)^5 (1+x)(1+2x)^2, -\frac{1}{2} < x < 1$.

c) $y = x^2 \sqrt{a^2 - x^2}, a > 0$.

z3) Naći minimum funkcije:

a) $y = am^{kx} + bm^{-kx}, m > 0, k \neq 0, a, b, m, k \in \mathbf{R}$.

b) $y = ax^m + \frac{b}{x^m}, a, b, m > 0$.

z4) Tenisko igralište datog obima $2s$ ima oblik pravougaonika koji se sa dvije suprotne strane završava polukrugovima. Odrediti dimenzije igrališta tako da površina pravougaonog dijela bude maksimalna.

z5) Krak jednakokrakog trougla ima dužinu 12 cm. Izračunati osnovicu tog trougla, tako da on ima maksimalnu površinu.

z6) U uspravnu kupu visine h i poluprečnika osnove r upisati valjak najveće zapremine, tj. odrediti dimenzije takvog valjka.

z7) U sferu poluprečnika r upisan je uspravni konus. Odrediti poluprečnik x baze konusa tako da zapremina konusa bude maksimalna.

Literatura

Š. Arslanagić: Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar: Zbirka zadataka iz matematike sa rješenjima i uputama, Svjetlost, Sarajevo, 1987.

Vladimir Stojanović: Matematiskop 3, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

И. Х. Сивашинский: Неравенства в Задачах, Наука, Москва, 1967.