

Mr. sc. Ismet Kalčo
Dr. sc. Fatih Destović

ASIMPTOTIKA SPEKTRA OPERATORA I KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA OPERATORA TIPA ŠTURM-LIUVILA

Sažetak

U ovom radu izučavamo neke operatore tipa Šturm-Liuvila sa kašnjenjem, konstrukciju rješenja jednačine metodom sukcesivnih aproksimacija, formiranje karakteristične funkcije operatora kao i asimptotsko ponašanje karakteristične funkcije.

Summary

In this paper we study some operators type Sturm-Liuville with delay construction of solutions of the equation method of successive approximations, the formation of the characteristic features of operators and the asymptotic behavior of the characteristic features.

Uvod

Spektralna analiza predstavlja jednu modernu matematičku teoriju koja se pokazala kao izuzetno efikasna pri rješavanju jedne jako široke klase problema iz raznih naučnih disciplina kao što su matematika, mehanika, fizika, elektronika, geofizika, meteorologija i druge prirodne i tehničke nauke. Obrnuti spektralni problemi danas predstavljaju jedan od najpopularnijih dijelova spektralne analize čemu u prilog govori veliki broj radova posvećenih upravo ovoj problematici. Najveći rezultati u spektralnoj teoriji u cjelini, a posebno za inverzne spektralne probleme postignut je za Šturm-Liuvilov operator

$$L[y] = -y''(x) + q(x)y$$

koji se takođe naziva i jednodimenzionalni Šredingerov operator. Spektralne karakteristike operatora $L[y]$ podrazumjevaju izučavanje asimptotike njegovih svojstvenih vrijednosti, asimptotike njegovih svojstvenih funkcija, razlaganje u red po svojstvenim funkcijama, rješavanje obratne zadaće i određivanje regularizovanih tragova. Posebnu klasu problema predstavljaju obrnuti problemi za operatore tipa Šturm-Liuvila kod kojih se potencijal $q(x)$ i argumentna funkcija y ne javljaju sa istim argumentom. Diferencijalne jednačine koje opisuju ovakve operatore nazivaju se diferencijalne jednačine sa pomjerenim argumentom.

Asimptotika spektra operatora $L[q, \alpha, h,]$ $L[q, \alpha, h,]$

Granični problem

$$-y''(x) + q(x)y(\alpha x) = \lambda y, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \quad (2)$$

$$y(\pi) = 0$$

Posmatraćemo kao problem sopstvenih vrijednosti operatora $L[q, \alpha, h]$. Neposredno se provjerava da rješenje integralne jednačine

$$y(x, z) = \cos zx + \frac{h}{z} \sin zx + \frac{1}{z} \int_0^x q(t) \sin z(x-t) y(\alpha t) dt, \quad (z^2 = \lambda), \quad (4)$$

Zadovoljava jednačinu (1) kao i granični uslov (2). Jednačina (4) rješava se metodom uzastopnih aproksimacija:

$$\begin{aligned} y(x, z) = & \cos zx + \frac{h}{z} \sin zx + \frac{1}{z} \int_0^x q(t) \sin z(x-t) y(\alpha t) dt + \frac{h}{z^2} \int_0^x q(t) \sin z(x-t) \sin z \alpha t dt + \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^l} \int_{D_l(x, l)} Q(T_l) \sin z(x-t_l) \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(\alpha t_i - t_{i+1}) \cos z \alpha t_i dT_l + \\ & + h \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l+1}} \int_{D_l(x, l)} Q(T_l) \sin z(x-t_l) \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(\alpha t_i - t_{i+1}) \sin z \alpha t_i dT_l. \end{aligned} \quad (5)$$

Iz (5) i graničnog uslova $y(\pi) = 0$ dobijamo karakterističnu

funkciju operatora $L[q, \alpha, h]$:

$$\begin{aligned} F(z) = & \cos \pi z + \frac{h}{z} \sin \pi z + \frac{1}{z} \int_0^{\pi} q(t) \sin z(\pi - t) \cos z \alpha t dt + \frac{h}{z^2} \int_0^{\pi} q(t) \sin z(\pi - t) \sin z \alpha t dt + \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^l} \int_{D_l(x, l)} Q(T_l) \sin z(\pi - t_l) \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(\alpha t_i - t_{i+1}) \cos z \alpha t_i dT_l + \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l+1}} \int_{D_l(x, l)} Q(T_l) \sin z(\pi - t_l) \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(\alpha t_i - t_{i+1}) \sin z \alpha t_i dT_l. \end{aligned}$$

Teorema1: Ako $q(x) \in L_1[0, \pi]$, sopstvene vrijednosti operatora $L[q, \alpha, h]$, imaju asimptotiku

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2h}{\pi} + o\left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right).$$

Dokaz: Iz ocjena

$$I_1 = \int_0^{\pi} q(t) \sin z(\pi - (1 - \alpha)t) dt = o\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} q(t) \sin z(\pi - (1 + \alpha)t) dt = o\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

slijedi

$$\int_0^{\pi} q(t) \sin z(\pi - t) \cos z \alpha t dt = o\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad (z \in R, \quad z \rightarrow \infty).$$

Slično se pokazuje da je

$$\int_0^{\pi} q(t) \sin z(\pi - t) \sin z \alpha t dt = o\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad (z \in R, \quad z \rightarrow \infty).$$

Takođe je

$$\frac{1}{z^l} \int_{D_l(\alpha)} Q(T_l) \sin z(\pi - t_l) \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(\alpha t_i - t_{i+1}) \cos z \alpha t_i dT_l = o\left(\frac{1}{|z|^{l+1}}\right),$$

$$\frac{1}{z^l} \int_{D_l(\alpha)} Q(T_l) \sin z(\pi - t_l) \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(at_i - t_{i+1}) \sin zat_i dT_l = O\left(\frac{1}{|z|^{l+2}}\right), \quad (l = 2, 3, \dots).$$

Iz ovih ocjena dobija se asimptotika karakteristične funkcije na realnoj osi:

$$F(z) = \cos \pi z + \frac{h}{z} \sin \pi z + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Neka je

$$z_n = n' + \frac{c_1}{n'} + O\left(\frac{1}{n'^2}\right) \left(n' = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}\right).$$

Tada je, za dovoljno velike po modulu n

$$\cos \pi z_n = (-1)^{n+1} \frac{c_1 \pi}{n'} + O\left(\frac{1}{n'^2}\right),$$

$$\sin \pi z_n = (-1)^n + O\left(\frac{1}{n'^2}\right),$$

$$\frac{1}{z_n^2} = \frac{1}{n'^2} + O\left(\frac{1}{n'^4}\right)$$

i

$$F(z_n) = \frac{(-1)^n}{n'} (h - c_1 \pi) + O\left(\frac{1}{n'^2}\right).$$

Ako je $h - c_1 \pi = 0$, tj. $c_1 = \frac{h}{\pi}$, dobijamo $F(z_n) = O\left(\frac{1}{n'^2}\right)$.

Dakle, za $c_1 = \frac{h}{\pi}$ nule funkcije $F(z)$ određene su sa tačnošću do $O\left(\frac{1}{n'^2}\right)$. Tada je

$$\lambda_n = z_n^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2h}{\pi} + O\left(\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

Teorema 2.: Ako je funkcija $q(x)$ apsolutno neprekidna, za asimptotiku spektra važi

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2h}{\pi} + \frac{\frac{2(-1)^n q(\pi)}{\pi(1-\alpha^2)} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \pi}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

Dokaz: Ako se na integrale I_1 i I_2 iz prethodne teoreme primjeni parcijalna integracija, dobija se

$$\int_0^{\pi} q(t) \sin z(\pi - t) \cos \alpha t dt = \frac{1}{z} \left(\frac{q(\pi)}{1 - \alpha^2} \cos \alpha \pi z - \frac{q(0)}{1 - \alpha^2} \cos \pi z \right) - \frac{1}{2z} \left(\frac{1}{1 - \alpha} I'_1 + \frac{1}{1 + \alpha} I'_2 \right),$$

gdje je

$$I'_1 = \int_0^{\pi} q'(t) \sin z(\pi - (1 - \alpha)t) dt,$$

$$I'_2 = \int_0^{\pi} q'(t) \sin z(\pi - (1 + \alpha)t) dt.$$

Iz apsolutne neprekidnosti $q(x)$ slijedi da $q'(x) \in L_1[0, \pi]$ i, zbog toga, važe ocjene

$$I'_1 = O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

$$I'_2 = O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

pa je

$$\int_0^{\pi} q(t) \sin z(\pi - t) \cos \alpha t dt = \frac{1}{z} \left(\frac{q(\pi)}{1 - \alpha^2} \cos \alpha \pi z - \frac{q(0)}{1 - \alpha^2} \cos \pi z \right) + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Odgovarajuće ocjene za preostale sabirke u izrazu za $F(z)$ dobijaju se kao i u prethodnoj teoremi. Karakteristična funkcija ima sljedeće asimptotsko razlaganje:

$$F(z) = \cos \pi z + \frac{h}{z} \sin \pi z + \frac{1}{z^2} (\xi_1 \cos \alpha \pi z + \xi_2 \cos \pi z) + O\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

gdje je

$$\xi_1 = \frac{q(\pi)}{1 - \alpha^2}, \xi_2 = -\frac{q(0)}{1 - \alpha^2}.$$

Neka je

$$z_n = n' + \frac{c_1}{n'} + \frac{c_2}{n'^2} + O\left(\frac{1}{n'^3}\right)$$

Iz asimptotskih razvoja

$$\cos \pi z_n = (-1)^{n+1} \frac{c_1 \pi}{n'} + \frac{\pi c_2}{n'^2} + O\left(\frac{1}{n'^3}\right),$$

$$\sin \pi z_n = (-1)^n + O\left(\frac{1}{n'^2}\right),$$

$$\cos \alpha \pi z_n = \cos n' \alpha \pi + O\left(\frac{1}{n'}\right)$$

slijedi

$$F(z_n) = \frac{(-1)^n}{n'} (h - \pi c_1) + \frac{1}{n'^2} [(-1)^{n+1} \pi c_2 + \xi_1 \cos n' \alpha \pi] + O\left(\frac{1}{n'^3}\right)$$

Konstante c_1 i c_2 određujemo iz uslova $h - \pi c_1 = 0$ i

$$(-1)^{n+1} \pi c_2 + \xi_1 \cos n' \alpha \pi. \text{ Dobija se } c_1 = \frac{h}{\pi}, \quad c_2 = \frac{(-1)^n q(\pi)}{\pi(1-\alpha^2)} \cos n' \alpha \pi$$

, pa je

$$\lambda_n = z_n^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2h}{\pi} + \frac{\frac{2(-1)^n q(\pi)}{\pi(1-\alpha^2)} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \pi}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

Teorema 3.: Ako je $q'(x)$ apsolutno neprekidna funkcija, spektar operatora $L[q, \alpha, h]$ ima asimptotiku

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2h}{\pi} + \frac{\frac{2(-1)^n q(\pi)}{\pi(1-\alpha^2)} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \pi}{n + \frac{1}{2}} +$$

$$\frac{\frac{h^2}{\pi^2} - \frac{2h^3}{3\pi} + \frac{2hq(0)}{\pi(1+\alpha)} - \frac{2(1+\alpha^2)q'(0)}{(1-\alpha^2)^2} + \frac{2(-1)^n}{\pi} \left(\frac{hq(\pi)}{1+\alpha} + \frac{2\alpha q'(\pi)}{(1-\alpha^2)^2} \right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \pi}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} + O\left(\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^3}\right)$$

Dokaz : U ovom slučaju je $q''(x) \in L_1[0, \pi]$, pa važe ocjene

$$I'_1 = -\frac{q'(\pi)}{z(1-\alpha)} \sin \alpha \pi z + \frac{q'(0)}{z(1-\alpha)} \sin \pi z + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

$$I'_2 = -\frac{q'(\pi)}{z(1+\alpha)} \sin \alpha \pi z + \frac{q'(0)}{z(1+\alpha)} \sin \pi z + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

i, na osnovu njih, ocjena

$$\int_0^\pi q(t) \sin z(\pi-t) \cos z \alpha t dt = \frac{1}{z} (\xi_1 \cos \alpha \pi z + \xi_2 \cos \pi z) + \frac{1}{z^2} \left[\frac{2\alpha q'(\pi)}{(1-\alpha^2)^2} \sin \alpha \pi z - \frac{(1+\alpha^2)q'(0)}{(1-\alpha^2)^2} \sin \pi z \right] + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Slično se pokazuje da je

$$\int_0^\pi q(t) \sin z(\pi-t) \sin z \alpha t dt = \frac{1}{z} \left(\frac{q(\pi)}{1-\alpha^2} \sin \alpha \pi z - \frac{q(0)}{1-\alpha^2} \sin \pi z \right) + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Ostali sabirci u izrazu za $F(z)$ su reda $O\left(\frac{1}{z^4}\right)$, pa je

$$F(z) = \cos \pi z + \frac{h}{z} \sin \pi z + \frac{1}{z^2} (\xi_1 \cos \alpha \pi z + \xi_2 \cos \pi z) + \frac{1}{z^3} (\xi_3 \sin \alpha \pi z + \xi_4 \sin \pi z) + O\left(\frac{1}{z^4}\right),$$

($z \in R, z \rightarrow \infty$), gdje je

$$\xi_3 = \frac{hq(\pi)}{1-\alpha^2} + \frac{2\alpha q'(\pi)}{(1-\alpha^2)^2}, \quad \xi_4 = -\frac{\alpha hq(0)}{1-\alpha^2} - \frac{(1+\alpha^2)q'(0)}{(1-\alpha^2)^2}.$$

Ako je $z_n = n' + \frac{c_1}{n'} + \frac{c_2}{n'^2} + \frac{c_3}{n'^3} + O\left(\frac{1}{n'^4}\right)$,

$$z_n = n' + \frac{c_1}{n'} + \frac{c_2}{n'^2} + \frac{c_3}{n'^3} + O\left(\frac{1}{n'^4}\right),$$

onda iz asimptotskih razvoja

$$\cos \pi z_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{c_1 \pi}{n'} + \frac{\pi c_2}{n'^2} + \frac{\pi c_3 - \frac{\pi^3 c_1^3}{6}}{n'^3} \right) + O\left(\frac{1}{n'^4}\right),$$

$$\sin \pi z_n = (-1)^n \left(1 - \frac{\pi^2 c_1^2}{n'^2} \right) + O\left(\frac{1}{n'^3}\right),$$

$$\cos \alpha \pi z_n = \cos n' \alpha \pi - \frac{\alpha \pi c_1}{n'} + O\left(\frac{1}{n'^2}\right),$$

$$\sin \alpha \pi z_n = \sin n' \alpha \pi + O\left(\frac{1}{n'}\right)$$

slijedi

$$\begin{aligned} F(z_n) &= \frac{(-1)^n}{n'} (h - \pi c_1) + \frac{1}{n'^2} [(-1)^{n+1} \pi c_2 + \xi_1 \cos n' \alpha \pi] + \\ &+ \frac{1}{n'^3} \left[(-1)^{n+1} \pi c_3 - \frac{\pi^3 c_1^3}{6} + (-1)^{n+1} \frac{\pi^2 c_1^2 h}{2} + (-1)^{n+1} \xi_2 \pi c_1 + \xi_3 \sin n' \alpha \pi + (-1)^n \xi_4 \right] + \\ &+ O\left(\frac{1}{n'^4}\right). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem izraza u zagradama sa nulom dobija se

$$c_1 = \frac{h}{\pi}, \quad c_2 = \frac{(-1)^n q(\pi)}{\pi(1-\alpha^2)} \cos n' \alpha \pi,$$

$$c_3 = -\frac{h^3}{3\pi} + \frac{hq(0)}{\pi(1+\alpha)} - \frac{(1+\alpha^2)q'(0)}{\pi(1-\alpha^2)^2} + \frac{(-1)^n}{\pi} \left(\frac{hq(\pi)}{(1+\alpha)} + \frac{2\alpha q' \pi}{(1-\alpha^2)^2} \right) \sin n' \alpha \pi.$$

Uvrštavanjem c_1, c_2 i c_3 u izraz

$$\lambda_n = n'^2 + 2c_1 + \frac{2c_2}{n} + \frac{c_1^2 + 2c_3}{n'^2} + O\left(\frac{1}{n'^3}\right)$$

$$\lambda_n = n'^2 + 2c_1 + \frac{2c_2}{n} + \frac{c_1^2 + 2c_3}{n'^2} + O\left(\frac{1}{n'^3}\right) \quad \text{dobija se navedena asimptotika.}$$

ASIMPTOTIKA SPEKTRA OPERATORA $L[q, \alpha, h, H]$

Operator $L[q, \alpha, h, H]$ definisan je graničnim problemom sa opštim graničnim uslovima

$$-y''(x) + q(x)y(\alpha x) = \lambda y(x), \quad (0 < \alpha < 1) \quad (2.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (2.2)$$

$$y'^{(\pi)} + Hy(\pi) = 0, \quad (2.3)$$

gdje je $h, H \in \mathbb{C}$.

metodom varijacije konstanti pokazuje se da je jednačina (2.1) sa graničnim uslovom (2.2) ekvivalentna integralnoj jednačini

$$y(x, z) = \cos z x + \frac{h}{z} \sin z x + \frac{1}{z} \int_0^x q(t) \sin z(x-t) y(\alpha t) dt, \quad (z^2 = \lambda), \quad (5.4)$$

Rješenje jednačine (5.4) je

$$\begin{aligned} y(x, z) = & \cos z x + \frac{h}{z} \sin z x + \frac{1}{z} \int_0^x q(t) \sin z(x-t) \cos z \alpha t dt + \frac{h}{z^2} \int_0^x q(t) \sin z(x-t) \sin z \alpha t dt + \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^l} \int_{D_l(x, l)} Q(T_l) \sin z(x-t_l) \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(\alpha t_i - t_{i+1}) \cos z \alpha t_i dT_l + \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l+1}} \int_{D_l(x, l)} Q(T_l) \sin z(x-t_l) \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(\alpha t_i - t_{i+1}) \sin z \alpha t_i dT_l. \end{aligned}$$

Granični uslov (2.3) određuje karakterističnu funkciju operatora $L[q, \alpha, h, H]$:

$$\begin{aligned} F(z) = & -z \sin \pi z + (h + H) \cos \pi z + \int_0^{\pi} q(t) \cos z(\pi - t) \cos z \alpha t dt + \\ & + \frac{1}{z} \left[h H \sin \pi z + h \int_0^{\pi} q(t) \cos z(\pi - t) \sin z \alpha t dt + H \int_0^{\pi} q(t) \sin z(\pi - t) \cos z \alpha t dt + \right] \\ & + \frac{h H}{z^2} \int_0^{\pi} q(t) \sin z(\pi - t) \sin z \alpha t dt + \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l(\alpha)} Q(T_l) \cos z(\pi - t_l) \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(\alpha t_i - t_{i+1}) \cos z \alpha t_i dT_l + \\ & + h \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^l} \int_{D_l(\alpha)} Q(T_l) \cos z(\pi - t_l) \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(\alpha t_i - t_{i+1}) \sin z \alpha t_i dT_l + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +H \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^l} \int_{D_l(\alpha)} Q(T_l) \sin z(\pi - t_l) \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(\alpha t_i - t_{i+1}) \cos z \alpha t_i dT_l + \\
 & +hH \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l+1}} \int_{D_l(\alpha)} Q(T_l) \sin z(\pi - t_l) \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(\alpha t_i - t_{i+1}) \sin z \alpha t_i dT_l .
 \end{aligned}$$

Za asimptotiku važe sljedeće teoreme

Teorema 2.1. Ako je $q(x) \in L_1[0, \pi]$, tada je

$$F(z) = z \cos \pi z + H \sin \pi z + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2H}{\pi} + O\left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right).$$

Teorema 2.2. Ako je $q(x)$ apsolutno neprekidna funkcija, onda je

$$F(z) = z \cos \pi z + H \sin \pi z + \frac{1}{z} (\xi_1 \cos \alpha \pi z + \xi_2 \cos \pi z) + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

$$\xi_1 = \frac{q(\pi)}{1 - \alpha^2}, \quad \xi_2 = -\frac{q(0)}{1 - \alpha^2}.$$

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2H}{\pi} + \frac{\frac{2(-1)^n \alpha q(\pi)}{\pi(1-\alpha^2)} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \pi}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

Teorema 2.3. Ako je $q'(x)$ apsolutno neprekidna funkcija, onda važe sljedeće ocjene

$$F(z) = z \cos \pi z + H \sin \pi z + \frac{1}{z} (\xi_1 \cos \alpha \pi z + \xi_2 \cos \pi z) + \frac{1}{z^2} (\xi_3 \sin \alpha \pi z + \xi_4 \sin \pi z) + O\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

$$\xi_3 = \frac{Hq(\pi)}{1 - \alpha^2} + \frac{(1 + \alpha^2)\alpha q'(\pi)}{(1 - \alpha^2)^2}, \quad \xi_4 = -\frac{\alpha Hq(0)}{1 - \alpha^2} - \frac{2\alpha q'(0)}{(1 - \alpha^2)^2}$$

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2H}{\pi} + \frac{\frac{2(-1)^n q(\pi)}{\pi(1-\alpha^2)} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \pi}{n + \frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{-\frac{2H^2}{3\pi} - \frac{4\alpha q'(0)}{\pi(1-\alpha^2)^2} + \frac{2(-1)^n}{\pi} [Hq(\pi) + (1+\alpha^2)q'(\pi)] \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha\pi}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} + O\left(\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^3}\right).$$

Dokazi ovih teorema suštinski se ne razlikuju od dokaza odgovarajućih teorema za operator $L[q, \alpha, h]$, pa su iz tih razloga izostavljeni.

Zaključak

Ovaj rad posvećen je određivanju spektralnih karakteristika za neke operatore tipa Šturm-Liuvila sa kašnjenjem. Rezultati u radu su oslonjeni na različite oblasti matematičke analize kao što su: Teorija regularizovanih tragova diferencijalnih operatora i Teorija analitičkih funkcija. Ovi rezultati predstavljaju dobru osnovu za rješavanje inverznog problema operatora tipa Šturm-Liuvila sa kašnjenjem metodom Furijeovih koeficijenata koja je nova metoda u ovoj problematici i primjenjuje se unazad nekoliko godina.

LITERATURA

[1] [1] Freiling G. And Yurko V. Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, Nova Science Publishers, Inc. Huntington, New York, (2008).

[2] [2] Ambarzumjan V., Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Zeitschr. für Physik, (1929)-Bd.53.-S.690-695

[3] [3] Норкин С. Б., Дифференциальные уравнения второго лорядка с запаздывающим аргументом, Наука, Москва (1965)

[4] [4] Бопр Г., Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Acta Math. 78-(1946). 1-96.

[5] [5] Levinson N., The inverse Sturm-Liouville problem, Math. Tidsskr. 13. (1949), 25-30

[6] [6] Carlson R., Inverse spectral theory for some singular Sturm-Liouville problems, J. Diff. Equations 106. (1993), 121-140

[7] [7] Пикула М., Определение дифференциального оператора Штурма-Лиувилля с запаздывающим аргументом по двум спектрам Математички весник 43, (1991), 159-171

Recenzent: dr. sc. Dževad Burgić, UNZE, BiH

Lektor: autori rada