

Dr. sc. Almir Huskanović
Mr sc. Hermína Alajbegović

RJEŠAVANJE KUBNE JEDNAČINE POMOĆU TRIGONOMETRIJSKE SMJENE

Sažetak

Postupak rješavanja kubne jednačine
 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$, je odavno poznat (još od 16. vijeka). U opštem slučaju koriste se Cardanove formule. Međutim, zbog dosta komplikovanog postupka, obično se pokušavaju najprije iskoristiti neki jednostavniji postupci. U ovom radu prezentiram rješavanje kubne jednačine u slučaju kad ona ima sva tri rješenja realna. Ovaj postupak je naročito koristan ako nijedno rješenje jednačine nije racionalan broj.

Ključne riječi: kubna jednačina, trigonometrijska smjena

SOLVING CUBIC EQUATION USING A TRIGONOMETRIC SUBSTITUTION

Summary

The method of solving cubic equation
 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$, has long been known (since the 16th century). Generally, we can use Cardano formulas. However, because of the rather complicated procedure, we usually first try to use some simpler procedures. In this paper we present the solving cubic equations in the case where it has three real solutions. This method is particularly useful if no solution of the equation is not a rational number.

Key words: cubic equation, trigonometric substitution

Neka su $a > 0$ i $\varphi \in [0, \pi]$ proizvoljni realni brojevi. Riješićemo jednačinu (1) $x^3 - 3a^2x = 2a^3 \cos \varphi$ i dokazaćemo da su joj sva tri rješenja realni brojevi.

$$\text{Pošto je (2) } \cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t,$$

stavljajući u (2) $t = \frac{\varphi}{3}$, dobićemo iz (1):

$$(3) \quad x^3 - 3a^2x = 2a^3 \left(4\cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3\cos \frac{\varphi}{3} \right), \text{ odnosno pogodnim grupisanjem:}$$

$$(4) \quad x^3 - \left(2a \cos \frac{\varphi}{3} \right)^3 - 3a^2 \left(x - 2a \cos \frac{\varphi}{3} \right) = 0.$$

Odavde se lako dobije:

$$(5) \quad \left(x - 2a \cos \frac{\varphi}{3} \right) \left(x^2 + 2ax \cos \frac{\varphi}{3} + 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{3} - 3a^2 \right) = 0.$$

Očigledno je jedno rješenje te jednačine $x_1 = 2a \cos \frac{\varphi}{3}$. Preostala dva se mogu dobiti iz kvadratne jednačine

$$(6) \quad x^2 + 2ax \cos \frac{\varphi}{3} + 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{3} - 3a^2 = 0,$$

čija je diskriminanta $D = 12a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{3}$, tako da su njena rješenja (ujedno i rješenja jednačine (1)) data formulama:

$$x_2 = a \left(\sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3} - \cos \frac{\varphi}{3} \right), \quad x_3 = -a \left(\sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3} + \cos \frac{\varphi}{3} \right).$$

Ova rješenja mogu se napisati i u obliku:

$$(7) \quad x_2 = 2a \cos \left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right), \quad x_3 = 2a \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Naime,

$$\begin{aligned} x_2 &= a \left(\sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3} - \cos \frac{\varphi}{3} \right) = 2a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\varphi}{3} - \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{3} \right) = 2a \left(\sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\varphi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\varphi}{3} \right) \\ &= 2a \cos \left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right), \end{aligned}$$

a analogno se izvede identitet za x_3 .

Dakle, skup rješenja kubne jednačine (1) je:

$$(8) \left\{ 2a \cos \left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right), 2a \cos \frac{\varphi}{3}, 2a \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \right\}.$$

Pretpostavimo sada da treba riješiti kubnu jednačinu

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0, b, c, d \in \mathbb{R}. \text{ Smjenom } t = x + \frac{b}{3a}$$

dobićemo kubnu jednačinu u kojoj nema kvadratnog člana. Otuda je dovoljno proučavati rješavanje kubne jednačine $x^3 + px + q = 0$. Pogledajmo za koje p i q se ova jednačina može prilagoditi jednačini (1). Odmah je očigledno, poredeći koeficijente:

$$(9) p = -3a^2, q = -2a^3 \cos \varphi$$

da je $p < 0$. Dalje slijedi:

$$\begin{aligned} \left(p < 0 \wedge a^2 = -\frac{p}{3} \right) &\Rightarrow q = -2 \cdot \left(-\frac{p}{3} \right) \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \varphi, \text{ pa je} \\ |q| &\leq 2 \frac{|p|}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}} \Rightarrow q^2 \leq -4 \frac{p^3}{27} \Rightarrow 27q^2 + 4p^3 \leq 0. \end{aligned}$$

Dakle, da bi se jednačina $x^3 + px + q = 0$ mogla napisati u obliku (1), potrebno je da bude zadovoljen uslov:

$$(10) 27q^2 + 4p^3 \leq 0.$$

Tada se iz jednakosti (9) mogu odrediti brojevi a i φ , a zatim uvrstiti u (8).

Inače, za rješenja kubne jednačine $x^3 + px + q = 0$, ($p, q \in \mathbb{R}$) poznato je sljedeće:

a) Ako je $27q^2 + 4p^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$ ta jednačina ima jedno realno i dva konjugovano – kompleksna rješenja

b) Ako je $27q^2 + 4p^3 = 0$, jednačina ima tri realna rješenja, među kojima imaju bar dva ista i

c) Ako je $27q^2 + 4p^3 < 0$, jednačina ima tri različita realna rješenja.

Primjer 1: Riješiti jednačinu $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Rješenje: Direktno se provjeri da jednačina nema racionalnih rješenja. Očitamo iz jednačine da je $p = -3, q = 1$. Iz (9) tada

dobijemo da je $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$ i $\cos \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$. Skup rješenja

date jednačine je prema (8): $\left\{ 2 \cos \frac{4\pi}{9}, 2 \cos \frac{2\pi}{9}, 2 \cos \frac{8\pi}{9} \right\}$.

Evo kako je ovu jednačinu riješio Francois Viète, francuski matematičar. Uzimanjem smjene $x = 2y$, dobićemo jednačinu $8y^3 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow 3y - 4y^3 = \frac{1}{2}$.

Pošto je $\sin(3t) = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$, ako uzmemo još jednu smjenu $y = \sin \varphi$, tada slijedi:

$$3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(3\varphi) = \frac{1}{2} \Rightarrow 3\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Da bi dobili rješenja polazne jednačine, dovoljno je uzeti

$$k \in \{0, 1, 2\}. \text{ Imamo da je tada } x = 2y = 2 \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \right),$$

$$k = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \sin \frac{\pi}{18};$$

$$k = 1 \Rightarrow x_2 = 2 \sin \left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \sin \frac{13\pi}{18};$$

$$k = 2 \Rightarrow x_3 = 2 \sin \left(\frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \sin \frac{25\pi}{18}.$$

Lako je provjeriti da se dobijeni skup rješenja $\left\{ 2 \sin \frac{\pi}{18}, 2 \sin \frac{13\pi}{18}, 2 \sin \frac{25\pi}{18} \right\}$ podudara sa skupom rješenja dobijenim prvom načinu, uzimajući u obzir da je $\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$,

pa je recimo $\sin \frac{\pi}{18} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} \right) = \cos \frac{8\pi}{18} = \cos \frac{4\pi}{9}$ i analogno,

$$\sin \frac{13\pi}{18} = \cos \frac{2\pi}{9} \text{ i } \sin \frac{25\pi}{18} = \cos \frac{8\pi}{9}.$$

Primjer 2: Riješiti jednačinu $x^3 - 19x + 30 = 0$.

Rješenje: Ova jednačina se može vrlo lako riješiti pogađanjem jednog rješenja ili pogodnim grupisanjem članova na lijevoj strani. Npr. ako grupišemo na sljedeći način:

$$x^3 - 4x - 15x + 30 = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2^2) - 15(x - 2) = 0, \quad \text{itd.,}$$

može se odmah dobiti jedno rješenje $x_1 = 2$. Nakon toga mogu se lako dobiti i ostala dva: $x_2 = 3, x_3 = -5$.

Korištenje trigonometrijske metode ovdje je otežano. Pokazuje se da bi za korištenje formula (8) trebalo riješiti jednu kubnu jednačinu, težu od zadane! Glavni problem je u određivanju

nepoznatog ugla Najprije očitamo: $p = -19, q = 30$, odakle se

$$\text{dobije da je } a = \sqrt{\frac{19}{3}} \text{ i } \cos \varphi = -\frac{45\sqrt{3}}{19\sqrt{19}}.$$

Da bismo našli rješenja po formulama (8), nama zapravo ne treba φ , nego $\cos \frac{\varphi}{3}$ i $\sin \frac{\varphi}{3}$. Pošto je prema formuli (2): $\cos \varphi = 4 \cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3 \cos \frac{\varphi}{3}$, dobijamo jednačinu po nepoznatoj $t = \cos \frac{\varphi}{3}$,

$$(11) 4t^3 - 3t = -\frac{45\sqrt{3}}{19\sqrt{19}}.$$

Uzmimo da je $b = \sqrt{\frac{3}{19}}$. Pošto je

$$-\frac{45\sqrt{3}}{19\sqrt{19}} = -\frac{45}{19}b = b\left(4 \cdot \frac{3}{19} - 3\right) = b(4b^2 - 3),$$

jednačina (11) se transformiše u:

$$(12) 4t^3 - 3t = 4b^3 - 3b \Leftrightarrow 4(t^3 - b^3) - 3(t - b) = 0 \Leftrightarrow (t - b)(4t^2 + 4tb + 4b^2 - 3) = 0.$$

Očito je $t_1 = b$ i $t_{2,3} = \frac{-4b \pm \sqrt{48(1 - b^2)}}{8}$, pa kako je

$$48(1 - b^2) = 48 \cdot \frac{16}{19} = 16^2 \cdot \frac{3}{19} = 16^2 b^2, \text{ nakon sređivanja dobije se}$$

$$t_2 = \frac{3b}{2}, t_3 = -\frac{5b}{2}.$$

Ako je $\cos \frac{\varphi}{3} = b = \sqrt{\frac{3}{19}}$, možemo dobiti i

$$\sin \frac{\varphi}{3} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\varphi}{3}} = \sqrt{1 - \frac{3}{19}} = \frac{4}{\sqrt{19}} \text{ i onda uvrštavanjem u formule}$$

(8) dolazimo do traženog skupa rješenja $\{-5, 2, 3\}$, a isti taj skup

ćemo dobiti i u slučaju da uzmemo da je $\cos \frac{\varphi}{3} = \frac{3b}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{19}}$,

odnosno u slučaju da je $\cos \frac{\varphi}{3} = \frac{-5b}{2} = -\frac{5}{2} \sqrt{\frac{3}{19}}$.

Literatura:

1. E. J. Barbeau: Polynomials, Springer, New York, 2003.
2. Zoran Mitrović: O Cardanovom metodu za rješavanje nekih algebarskih jednačina, Mat – Kol (Banja Luka), XIV (1), 2008. str. 85. – 89.
3. Đura Paunić: Pravilni poligoni, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2006.

Recenzent: dr. sc. Dževad Burgić, UNZE, BiH

Lektor: koautori rada