

*Dr. sc. Dževad Burgić
Nedžad Cikotić, prof.*

PARAMETARSKE KRIVE U RAVNI

Sažetak

U matematičkim primjenama i teorijskim razmatranjima je često lakše, a nekada i neophodno da se kriva zada parametarskim jednačinama. Tako opisane krive su pogodnije za izučavanje. Neke od parametarskih krivih imaju zanimljivu geometrijsku interpretaciju.

Ključne riječi: *zatvorena prosta putanja, parametarske jednačine, parametarske krive, dužina luka, polarne koordinate, polarna jednačina krive, GeoGebra.*

Summary

In mathematical applications and theoretical considerations it is often easier, and sometimes necessary to describe curves with parametric equations. Such described curves is a convenient way for the study. Some of parametric curves have an interesting geometric interpretation.

Keywords: *closed path, parametric equations, parametric curves, arc length, polar coordinates, polar equation of a curve, GeoGebra.*

Uvod

Jedna od Descartesovih¹ ideja je da se svakoj tački ravni jednoznačno pridruži uređeni par (x, y) realnih brojeva i obrnuto, omogućila je vizuelno predstavljanje grafika krivih. Predstavljanje krivih u ravni u obliku jednačine $y = f(x)$, gdje se najočitije vidi veza između slike i originala, ima i svoje nedostatke. Neke krive je nemoguće opisati tim oblikom. Izražavajući x i y preko treće promjenljive t , dobijamo parametarski oblik jednačine krivih. On nam omogućava kako detaljnije ispitivanje svojstava krivih, tako i crtanje njenog grafika.

Upotreba računara donijela je neslućene mogućnosti za proučavanje i praktičnu primjenu ovih matematičkih objekata. Čak, besplatni softver kao što je Geogebra nudi nam efikasne alate za vizuelizaciju krivih. Ove alate prikazat ćemo u dijelu “Vizuelizacija parametarskih krivih u programu GeoGebra”. Autori ovog rada, koristeći Geogebra, došli su do krivih čija je geometrijska interpretacija iznenađujuća i koje, u njima dostupnoj literaturi nisu vidjeli. Spomenute krive i njihove geometrijske interpretacije prikazat ćemo u dijelu naziva “Galerija parametarskih krivih”. Parametarske krive imaju izuzetan značaj u računarskoj grafici. Neki laserski štampači koriste Bézierove² krive za predstavljanje slova i drugih simbola

U pisanju matematičkih tekstova postoje dvije krajnosti: da tekst samo u “grubim crtama” opiše matematičke objekte i više se oslanja na njihovu intuitivnu predstavu ili da bude precizan ali shvatljiv samo matematičarima. U pisanju ovog teksta izabrali smo sredinu. Matematička podloga ovoj temi data je u dijelu pod nazivom “Matematički alati”. Prvenstveno, želimo da tekst bude od koristi studentima i srednjoškolcima. Nadam se da će on na njih djelovati motivaciono, radi veće upotrebe računara u naučno-edukativne svrhe.

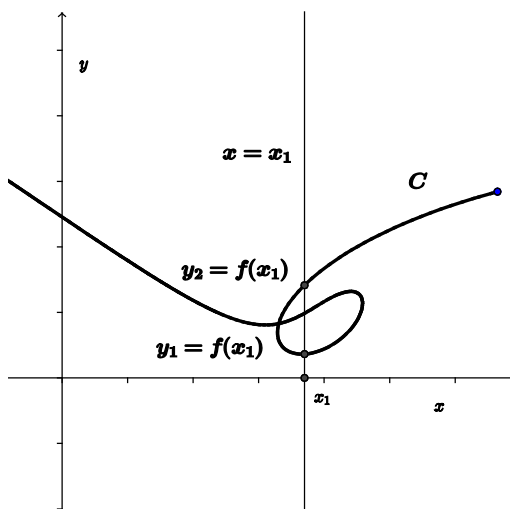
¹ René Descartes, 1596-1650, francuski filozof, fizičar, matematičar i utemeljitelj analitičke geometrije. Mogućnost algebraizacije geometrije iznio je u djelu pod nazivom *Geometrija*, koje je objavio kao dodatak svojem filozofskom djelu *Discours de la méthode* (Rasprava o metodi; puni naziv na francuskom jeziku ima 31 riječ). Za više informacija o Descartesovom doprinosu matematici vidi Znam, Štefan i dr.: *Pogled u povijest matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989., str. 106-109.

² Pierre Bézier, 1910-1999, francuski matematičar.

1 Matematički alati

1.1 Uvodna razmatranja i definicije

Posmatrajmo krivu C na slici1.



Slika 1.

Očigledno, nemoguće je opisati datu krivu u obliku jednakosti $y = f(x)$, zato što kriva C pada na testu “vertikalne prave”. Algebarski rečeno postoje $y_1 = f(x_1)$ i $y_2 = f(x_1)$ takvi da vrijedi $y_1 \neq y_2$ i $x_1 = x_1$, tj. imamo slučaj višeznačne funkcije. Ovaj problem rješavamo tako što x i y izrazimo preko nove promjenljive t .

U ovom primjeru smo koristili pojam kriva, oslanjajući se samo na intuitivnu predstavu o tom pojmu. U narednim definicijama ćemo preciznije uvesti taj pojam. Sa $\mathbf{R}$ ćemo označiti skup realnih brojeva.

Neka je $I = [\alpha, \beta]$ i neka su $\varphi: I \rightarrow \mathbf{R}$, $\psi: I \rightarrow \mathbf{R}$ dvije neprekidne funkcije³ i $\Gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^2$ preslikavanje zadano sa

$$t \rightarrow (\varphi(t), \psi(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

³ Više o pojmovima preslikavanje i neprekidna funkcija vidi u knjizi Adnađević, Dušan; Kadelburg, Zoran: *Matematička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd, 1989., str. 91.

Definicija 1.1 Preslikavanje Γ , naziva se putanjom. Tačke⁴ $A(\varphi(\alpha) \ \psi(\alpha))$ i $B(\varphi(\beta) \ \psi(\beta))$ nazivaju se početnom, odnosno krajnjom tačkom putanje, respektivno. Ako se početna i krajnja tačka poklapaju, putanja je zatvorena.

Definicija 1.2 Putanju Γ nazivamo prostom ako je $\Gamma : I \rightarrow R$ injektivna funkcija.

Definicija 1.3 Ako je Γ zatvorena, restrikcija $\Gamma|[\alpha, \beta)$ injektivna onda za Γ kažemo da je zatvorena prosta putanja.

Definicija 1.4 Slika (zatvorene) proste putanje zove se (zatvorena) prosta kriva.

Definicija 1.5 Za prostu krivu, definisanu prostom putanjom $\Gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\Gamma(t) = (\varphi(t) \ \psi(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$, kažemo da je parametrizirana parametrom t ili da je parametarska kriva. Također, ćemo reći da je kriva zadana jednačinama

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (1)$$

Ako su ispunjeni uslovi iz definicije (1.5), tada svaka vrijednost od t određuje tačku (x, y) , koju možemo prikazati u koordinatnoj ravni. Spajanjem tih tačaka dobijamo geometrijsku interpretaciju parametarski zadane krive.

Jedna od interpretacija parametra t je vrijeme. U ovoj interpretaciji jednačine $x = f(t)$ i $y = g(t)$ daju poziciju objekta u vremenu t .

Često smo u situaciji da razmatramo skup tačaka $\{ \varphi(t) \ \psi(t) \mid t \in \Delta \}$ gdje je $\Delta \subset \mathbf{R}$ interval. Ovaj skup tačaka ne mora biti kriva. Međutim, mi skup Δ možemo podijeliti na skupove (segmente) $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, tako da dobijemo $\Gamma : [\alpha_{i-1}, \alpha_i] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\Gamma_i(t) = (\varphi(t) \ \psi(t))$, $\alpha_{i-1} \leq t \leq \alpha_i$, proste putanje. Pri čemu, podjela skupa Δ je takva da je $\Delta = \cup_i [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ a presjek dva takva segmenta

⁴ Umjesto preciznog izražavanja “tačka čije su koordinate (x, y) u Decartesovom pravougloj koordinatnom sistemu”, zbog kratkoće u izlaganju, reći ćemo “tačka (x, y) ”.

može biti samo krajnja tačka. Tada se pomenuti skup tačaka naziva krivom.

Različite putanje mogu definisati jednu te istu krivu.

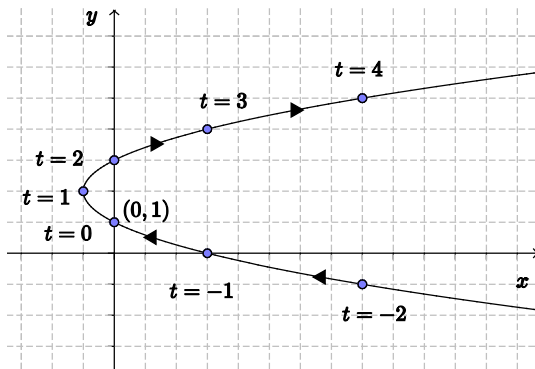
Primjer 1.1 Putanja $t \rightarrow (\cos(t) \sin(t))$, $0 \leq t \leq \pi$, jeste prosta. Slika ove putanje je polukružnica, tj. prosta kriva. Ovu krivu možemo zadati i sljedećom parametrizacijom

$$\tau \rightarrow (\tau, \sqrt{1-\tau^2}) \quad -1 \leq \tau \leq 1$$

Primjer 1.2 Odredi i nacrtaj krivu definisanu sljedećim parametarskim jednačinama.

$$x = t^2 - 2t, \quad y = t + 1$$

Rješenje. Svaka vrijednost t daje tačku na krivoj, kako je pokazano u tabeli 1, npr. ako je $t = 0$, onda je $x = 0$, $y = 1$, a odgovarajuća tačka krive je $(0,1)$. Na slici 2 mi smo unijeli tačke (x,y) određene sa nekoliko vrijednosti parametra i spojili ih, tako da smo dobili približnu sliku krive određene zadanim parametarskim jednačinama.



Slika 2.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

Tabela 1.

Vrijednosti x i y za zadano t

Naslućujemo da je tražena kriva parabola. Uvjerimo se u to eliminišući parametar t iz parametarskih jednačina. Kako vrijedi $y = t + 1$, to imamo da je

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

Dakle, kriva zadana parametarskim jednačinama je parabola $x = y^2 - 4y + 3$. ◇

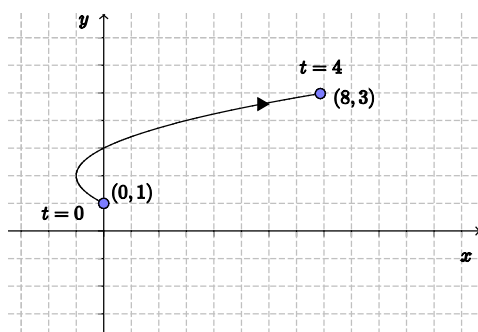
U primjeru 1.2 nismo imali ograničenja za parametar t , pa je on mogao biti bilo koji realan broj. Ponekad, mi ćemo ograničiti t tako da on uzima vrijednosti iz segmenta tj. $t \in [a, b]$. Primjera radi, parametarska kriva

$$x = t^2 - 2t \quad y = t + 1 \quad 0 \leq t \leq 4$$

prikazana na slici 3. je dio parabole iz primjera 1.2 koja počinje u tački $(0, 1)$ a završava u tački $(8, 5)$. Strelica pokazuje smjer koji opisuje tačka (x, y) kada t uzima vrijednosti iz segmenta $[0, 4]$. Općenito, kriva zadana parametarskim jednačinama

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad a \leq t \leq b \quad (2)$$

ima polaznu tačku $(f(a), g(a))$ i dolaznu tačku $(f(b), g(b))$.



Slika 3.

1.2 Primjena diferencijalnog i integralnog računa na ispitivanje parametarskih krivih

Da bi se detaljnije ispitala svojstva i preciznije nacrtale parametarske krive, koristi se alati diferencijalnog i integralnog računa. To ćemo prikazati u sljedećem primjeru.⁵

Primjer 1.3 *Kriva C je definisana parametarskim jednačinama*

$$x = t^2, \quad y = t^3 - 3t.$$

i) Pokazati da C ima dvije tangente u tački $(3,0)$ i naći njihove jednačine.

ii) Naći tačke na C gdje je tangenta horizontalna ili vertikalna.

iii) Naći intervale konveksnosti i konkavnosti zadane krive.

iv) Skiciraj krivu.

Rješenje. i) Primijetimo da vrijedi $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0$ kada je $t = 0$ ili $t = \pm\sqrt{3}$. Tako da tačku $(3,0)$ dobijamo preko dvije vrijednosti parametra, $t = \sqrt{3}$ i $t = -\sqrt{3}$. To nam pokazuje da kriva C siječe samu sebe u tački $(3,0)$. Budući da je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

Izvod tangente kada je $t = \pm\sqrt{3}$ je $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{6}{2\sqrt{3}} = \pm\sqrt{3}$, pa, slijedi da su jednačine tangenti na zadanu krivu u tački $(3,0)$, oblika

$$y = \sqrt{3}(x-3) \quad \text{i} \quad y = -\sqrt{3}(x-3).$$

ii) Kriva C ima horizontalnu tangentu kada je $\frac{dy}{dx} = 0$, i to,

kada je $\frac{dy}{dt} = 0$ i $\frac{dx}{dt} \neq 0$. Pošto je $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$, to će spomenuti uslov biti ispunjen kada je $t^2 = 1$, tj. $t = \pm 1$.

⁵ Stewart, James: *Calculus*, 7th ed., Brooks/Cole, Pacific Grove, 2011., str. 670.

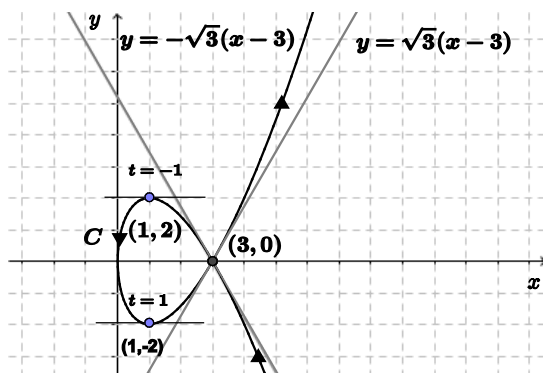
Odgovarajuće tačke na krivoj C su $(1, -2)$ i $(1, 2)$. C ima tangentu paralelnu y -osi kada je $\frac{dx}{dt} = 2t = 0$, tj. kada je $t = 0$. (Primijetimo da je tada $\frac{dy}{dt} \neq 0$). Odgovarajuća tačke na krivoj C je $(0, 0)$.

iii) Da bi smo odredili konveksnost i konkavnost izračunajmo drugi izvod:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2} \left(t + \frac{1}{t^2} \right)}{2t} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}$$

Na osnovu dobijenog izraza za drugi izvod zaključujemo da je kriva C konveksna za $t > 0$ i konkavna za $t < 0$.

iv) iskoristivši rezultate dobijene pod i), ii) i iii) skicirajmo grafik. Grafik zadane krive je prikazan na slici 4.



◇

Slika 4.

Sada ćemo pokazati kako se izračunava površina koju formira jedna parametarski zadana kriva.

Primjer 1.4 Izračunati površinu prvog "svoda" cikloide iznad x -ose, od tačke $x = 0$ do tačke $x = 2a\pi$.

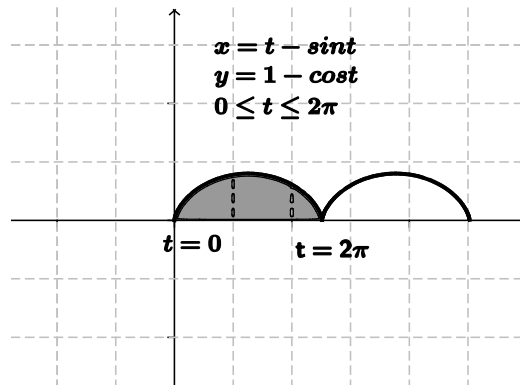
Rješenje. Parametarske jednačine cikloide su

$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t).$$

Odgovarajuće vrijednosti za parametar t su $t = 0$ i $t = 2\pi$, također, imajući u vidu da je $dx = a(1 - \cos t)dt$, i poznate formule za izračunavanje površine dijela ravni ograničene krivom datom u eksplicitnom obliku $y = f(x)$ i x -osom imamo

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt = \\ &= a^2 \left(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) \Big|_0^{2\pi} = a^2 \cdot 3\pi. \end{aligned}$$

Prvi "svod" cikloide čiju smo površinu izračunali prikazan je na slici 5.



◇

Slika 5.

Posmatrajmo krivu zadanu parametarskim jednačinama:

$x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$ gdje su φ i ψ neprekidne funkcije na odsječku $[\alpha, \beta]$. Na toj krivoj uočimo luk $l = \overline{AB}$ za

$t \in [\alpha, \beta]$, a zatim ćemo ga podijeliti na n dijelova tačkama $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$, koje odgovaraju vrednostima parametra t : $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$. Ako sa p_k označimo dužinu duži $M_k M_{k+1}$, onda je $p_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$ odakle je dužina cijele poligonalne linije $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ jednaka

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2}.$$

Ako su funkcije φ' i ψ' neprekidne onda na osnovu Lagranžove teoreme⁶ vrijedi

$$\begin{aligned} \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) &= (t_{k+1} - t_k) \cdot \varphi'(\tau_k) \quad \tau_k \in (t_k, t_{k+1}) \\ \psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) &= (t_{k+1} - t_k) \cdot \psi'(\tau_k^*) \quad \tau_k^* \in (t_k, t_{k+1}) \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k^*)]^2} \quad (3)$$

Suma (3), iako slična integralnu sumu, nije integralna suma.

Ona bi bila da je $\tau_k = \tau_k^*$. Ali, kako ona ima istu graničnu vrijednost kao i integralna suma⁷

$$\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2}$$

to možemo uzeti da je $\tau_k = \tau_k^*$ i da vrijedi

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2}.$$

Ako sada uvedemo funkciju $f(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ na

⁶ Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813, talijanski matematičar i astronom. Dokaz Lagrangeove teoreme vidi u knjizi Adnađević, Dušan; Kadelburg, Zoran: *Matematička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd, 1989., str. 131.

⁷ Dokaz ove činjenice vidi ibid str. 209.

$[\alpha, \beta]$, i oznaku $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, onda je, po definiciji određenog integrala

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta t_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \Delta t_k = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Sa druge strane kada $n \rightarrow \infty$ i $\max \Delta t_k \rightarrow 0$ dužina poligonalne linije teži dužini luka, pa je stoga dužina luka data sa

$$s = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta t_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\phi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta t_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \Delta t_k = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Na osnovu činjenica do kojih smo došli vidimo da vrijedi sljedeći teorem.

Teorema 1.1 *Neka su $\varphi(t)$, i $\psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, neprekidne funkcije koje imaju neprekidne izvode. Tada za dužinu s krive, određene jednačinama $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ vrijedi*

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad \blacksquare$$

Primjer 1.5 *Izračunaj dužinu krive zadane parametarskim jednačinama*

$$x = t \sin t, \quad y = t \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Rješenje. Na osnovu prethodne teoreme imamo sljedeći račun:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t + t \cos t)^2 + (\cos t - t \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + \cos^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t) + t^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} dt.$$

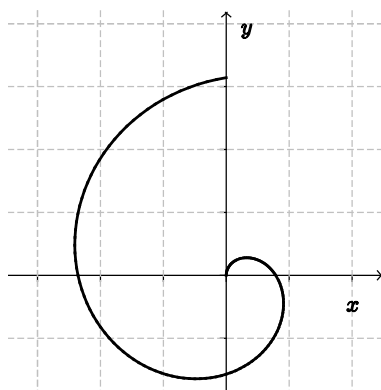
Kako vrijedi

$$\int \sqrt{1+t^2} dt = \frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{1+t^2}| + C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta, to na osnovu Newton-Leibnizove formule slijedi

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} dt = \left(\frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{1+t^2}| \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi \sqrt{1+(2\pi)^2} + \frac{1}{2} \ln |2\pi + \sqrt{1+(2\pi)^2}| \approx 21,2563. \end{aligned}$$

Dio krive čiju smo dužinu izračunali prikazan je na slici 6.



◇

Slika 6.

Neke krive se bolje mogu opisati ako njene tačke prikažemo u polarnim koordinatama. Tako, posmatrajući krive u polarnim koordinatama došlo se do nekih “poznatih” krivih kao što su Arhimedova spirala i Bernulijeva lemniskata.

Za svaku tačku $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ za koju vrijedi $x^2 + y^2 \neq 0$ važi

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Odatle se može izvesti da postoji jedinstveno određen broj $\varphi \in [0, 2\pi)$ takav da je

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Umjesto intervala $[0, 2\pi)$ može se uzeti bilo koji drugi poluzatvoreni interval dužine 2π , npr. $[-\pi, \pi)$. Tako uvedeni broj φ zovemo *polarnim uglom* tačke (x, y) , a broj $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ zovemo *polarnim radijusom* te tačke. Brojevi r i φ nazivaju se polarnim koordinatama te tačke i očigledno je oni jednoznačno određuju. Važi

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (4)$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{za} \quad x \neq 0 \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{za} \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

m jednačinom oblika

$r = f(\varphi)$, gdje je $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, onda skup tačaka u ravni čije polarne koordinate r i φ zadovoljavaju tu jednačinu može predstavljati neku krivu. Kao i u slučaju pravouglih koordinata, mi krivu zadanu u obliku $r = f(\varphi)$ možemo zapisati pomoću parametarskih jednačina na osnovu (4) na sljedeći način.

$$x = r \cos \varphi = f(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi = f(\varphi) \sin \varphi \quad (5)$$

gdje je φ parametar.

Primjer 1.6 *Arhimedova spirala je zadana polarnim koordinatama jednačinom:*

$$r = a\varphi, \quad a = \text{const} > 0$$

na osnovu (5) vrijedi

$$x = r \cos \varphi = a\varphi \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi = a\varphi \sin \varphi$$

gdje je φ parametar.

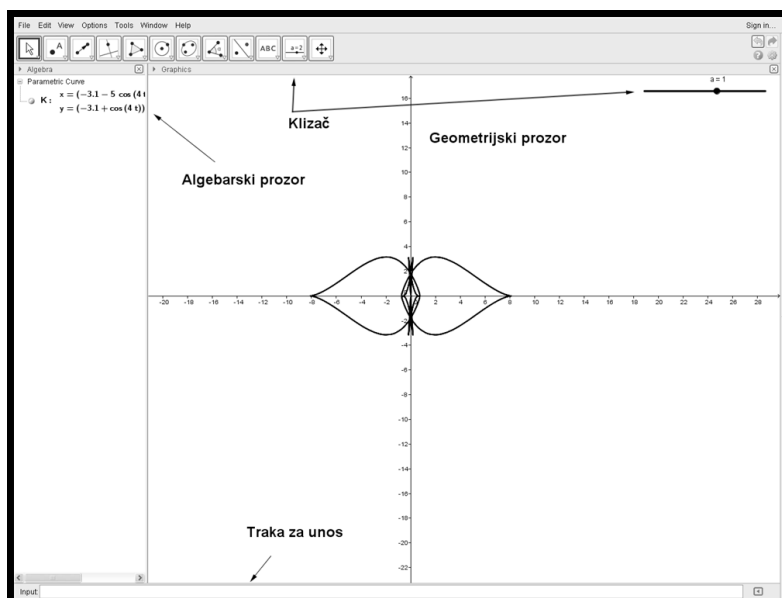
Uzmemo li uobičajenu oznaku za parametar dobijamo parametarske jednačine Arhimedove spirale:

$$x = at \cos t, \quad y = at \sin t, \quad t > 0. \quad \diamond$$

2 Vizuelizacija parametarskih krivih u programu GeoGebra

Program GeoGebra je besplatni matematički softver koji povezuje geometriju, algebru i analizu. GeoGebra omogućava istraživanje mijenjanjem položaja, veličine geometrijskih objekata i njihovim upoređivanjima sa algebarskim zapisom u algebarskom prozoru. Program je besplatan i preveden je na više od 40 svjetskih jezika.

U programu GeoGebra možemo raditi sa brojevima, uglovima, tačkama, vektorima, dužima, pravama, konikama i parametarskim krivama. Ove objekte zadajemo pomoću koordinata ili jednačina u traku za unos (slika.7) nakon čega treba pritisnuti tipku enter. Tada se algebarski zapis pojavljuje u algebarskom prozoru, dok se njegova geometrijska interpretacija, tj. njegova vizuelizacija, automatski prikaže u geometrijskom prozoru.



Slika 7. Radno okruženje GeoGebre

Opći oblik naredbe za unos parametarski zadane krive u GeoGebri je:

Curve[izraz e_1 , izraz e_2 , parametar t , broj a , broj b].

Unošenjem ove naredbe dobijamo parametarsku krivu u kartezijevim koordinatama sa zadanim izrazima e_1 za x i e_2 za y , koji su izraženi preko parametra t iz zadanog segmenta⁸ $[a, b]$.

Primjer 2.1 *Neka je data parametarski zadana kriva*

$$\left. \begin{aligned} x &= (-3.1 - 5 \cos(4t)) \cos^3 t \\ y &= (-3.1 + \cos(4t)) \sin^3(4t) \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Skicirati krivu u programu Geogebra.

Rješenje. Na osnovu općeg oblika naredbe za unos parametarski zadane krive, unijet ćemo sljedeću naredbu u traci za unos

$$\text{Curve}[(-3.1-5\cos(4t))\cos(t)^2,(-3.1+\cos(4t))\sin(4t)^3,t,0,2\pi],$$

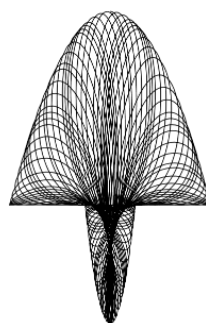
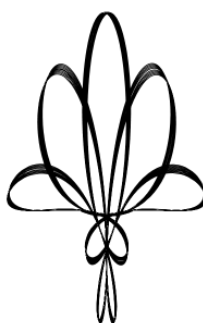
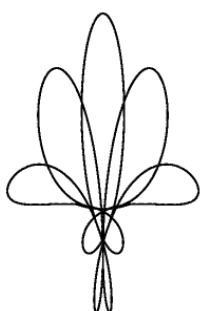
i pritisnuti tipku enter. Istovremeno dobijamo u algebarskom prozoru njene jednačine, a u prozoru za grafički prikaz njenu vizuelizaciju kroz graf u Descartesovom pravouglom koordinatnom sistemu. Graf zadane krive, nacrtan u GeoGebri, dat je na slici 8.

Klizač (Slider) je GeoGebrin alat koji nam omogućava kontrolisanje vrijednosti parametara iz određenog intervala. Unosom dodatnih parametara u jednačine parametarski zadanih krivih i kontrolisanjem njihovih vrijednosti pomoću klizača, dobijamo neočekivane mogućnosti za njihovo istraživanje. Da bi smo aktivirali klizač potrebno je kliknuti na ikonicu ovog alata u alatnoj traci, a zatim na slobodnu površinu u geometrijskom prozoru. Pritom se otvara dijaloški prozor u kojem određujemo granice za parametar. Oblikovanje i položaj klizača određuje se u dijaloškom prozoru Svojstva. Pri tome, da bi parametar iz jednačine krive bio povezan sa alatom klizač, mora imati istu oznaku kao i klizač.

⁸ Oblici naredbi preuzeti iz Hohenwarter, M.; Hohenwarter, J.: *GeoGebra Help: Official Manual 3.2.* [pdf.], International GeoGebra Institute, s.l., 2009., str. 54, URL: <http://www.geogebra.org/help/docuen.pdf>. [pristupljeno 28.08.2014].

3. Galerija parametarskih krivih

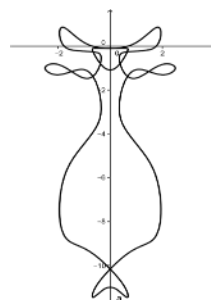
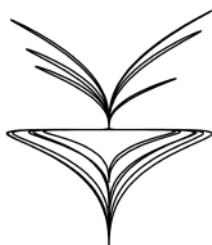
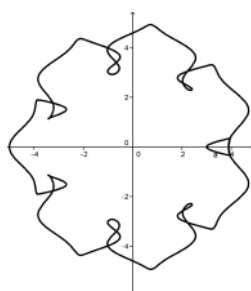
Koristeći klizač, unoseći različite parametarske jednačine krivih, dobijali smo njihove interesantne geometrijske interpretacije. Neke od ovih slika podsjećaju na likove iz naučno-fantastičnih filmova, neke na umjetničke crteže različitih pravaca. Dok neke pak, liče na precizne inženjerske skice. Ispod svake slike date su i parametarske jednačine odgovarajuće krive. U nama dostupnoj literaturi, krive sa ovakvom geometrijskom interpretacijom nismo vidjeli.



$$\left. \begin{aligned} x &= [0.6 + \cos(8.333t)] \sin(2.5t) \\ y &= [0.6 + 2.5 \cos(8.333t)] \cos^2(2.5t) \\ t &\in [0, 12\pi] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= [0.6 + \cos(8.33t)] \sin(2.5t) \\ y &= [0.6 + 2.5 \cos(8.33t)] \cos^2(2.5t) \\ t &\in [0, 12\pi] \end{aligned} \right\}$$

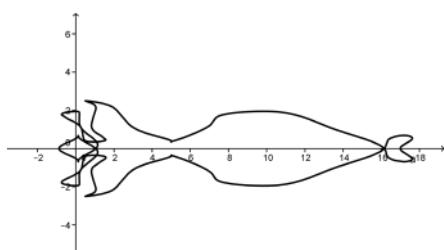
$$\left. \begin{aligned} x &= [0.6 + \cos(8.3t)] \sin(2.5t) \\ y &= [0.6 + 2.5 \cos(8.3t)] \cos^2(2.5t) \\ t &\in [0, 12\pi] \end{aligned} \right\}$$



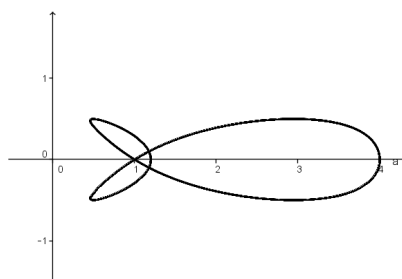
$$\left. \begin{aligned} x &= 4 \cos t - \cos^5(8t) \\ y &= 4 \sin t - \sin(8t) \\ t &\in [0, 2\pi] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= [4.4 - \cos(0.31t)] \sin^5(1.5t) \\ y &= [-4.4 + 1.9 \cos(0.31t)] \cos^5 t \\ t &\in [0, 12\pi] \end{aligned} \right\}$$

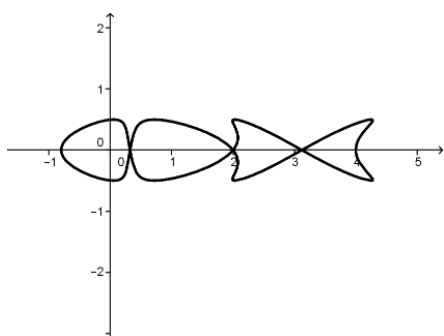
$$\left. \begin{aligned} x &= 1.5 \sin t - \sin(7t) \\ y &= -12^{\cos t} + \cos^5(5t) \\ t &\in [0, 2\pi] \end{aligned} \right\}$$



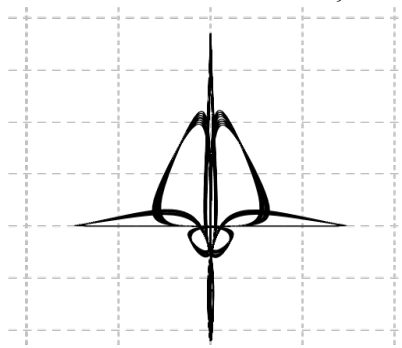
$$\left. \begin{aligned} x &= 1.5 \cdot 12^{\cos t} - \cos^5(8t) \\ y &= 1.5 \sin t - \sin(7t) \\ t &\in [0, 2\pi] \end{aligned} \right\}$$



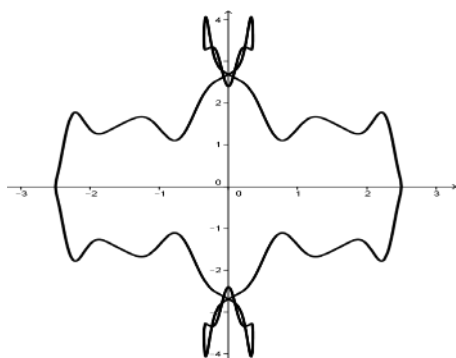
$$\left. \begin{aligned} x &= 5^{\cos(4t)} - \cos^5(4t) \\ y &= 1.5 \sin(8t) - \sin(8t) \\ t &\in [0, 2\pi] \end{aligned} \right\}$$



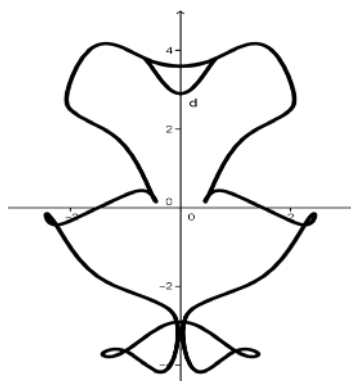
$$\left. \begin{aligned} x &= 5^{\cos(2t)} - \cos^5(4t) \\ y &= 1.5 \sin(8t) - \sin(8t) \\ t &\in [0, 2\pi] \end{aligned} \right\}$$



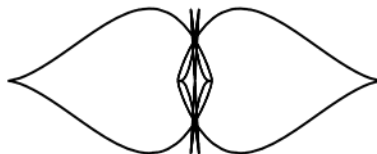
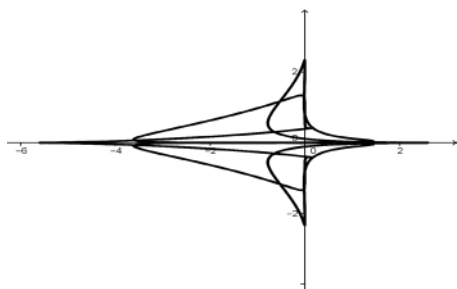
$$\left. \begin{aligned} x &= [0.6 + \cos(6.67t)] \sin^3(2t) \\ y &= [0.6 + 3.1 \cos(6.67t)] \cos^4(2t) \\ t &\in [0, 12\pi] \end{aligned} \right\}$$



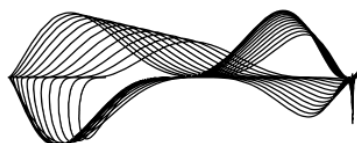
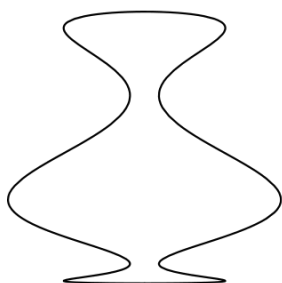
$$\left. \begin{aligned} x &= 1.5 \sin t - \sin(3t) \\ y &= 3.4 \cos t - \cos^5(7t) \\ t &\in [0, 2\pi] \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} x &= 1.5 \sin t - \sin(6t) \\ y &= 3.9 \cos t - \cos^5(5t) \\ t &\in [0, 2\pi] \end{aligned} \right\}$$

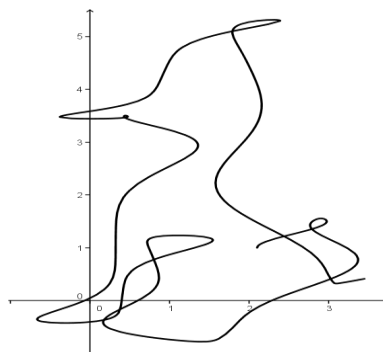
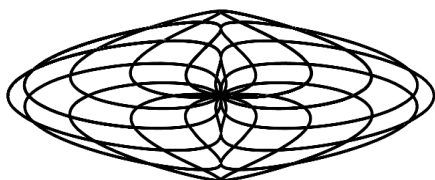


$$\left. \begin{aligned} x &= (-1.5 + 4.1\cos(1.75t)) \cos^4(0.7t) \\ y &= [-1.5 + \cos(1.75t)] \sin^3(0.7t) \\ t &\in [0, 12\pi] \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x &= [-3.1 - 5\cos(4t)] \cos^3 t \\ y &= [-3.1 + \cos(4t)] \sin^3(4t) \\ t &\in [0, 4\pi] \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} x &= 1.6\sin t + \sin(5t) \\ y &= -2.6 \cos t + \cos^2 t \\ t &\in [0, 4\pi] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -5\cos(1.0204t) \cos^3(t) \\ y &= \cos(1.0204t) \sin^3(5t) \\ t &\in [0, 12\pi] \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} x &= (-2.7 \cos(1.86t)) \cos^2(2.6t) \\ y &= \cos(1.86t) \sin(2.6t) \\ t &\in [0, 12\pi] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 3.1^{\cos t} - \cos^5(-4.4t) \\ y &= 0.2^{\sin t} - \sin(-3.9t) \\ t &\in [0, 12\pi] \end{aligned} \right\}$$

Zaključak

Galilej⁹ je u svojim pismima napisao: “Troglovi, kvadrati, kružnice, sfere, konusi i piramide slova su kojima je pisana priroda”.¹⁰ Vizuelizacija parametarskih krivih kao da potvrđuje njegovu misao. Možda bi algebarski prijevod ove njegove rečenice bio: parametarski zadane jednačine krivih su šifrat prirode. Dešifriranjem ovih šifrata sigurno bi se došlo do novih značajnih činjenica iz matematičke teorije i primjena. Njihovom proučavanju uz pomoć svima dostupnog softvera i matematičkih alata, mogu se posvetiti ne samo profesionalni matematičari, već i nadareni studenti i srednjoškolci.

Nadamo se, da smo uspjeli u svojoj namjeri predstavljanja parametarskih krivih na što je moguće jednostavniji način, a da se pri tom pridržavamo strogih pravila matematičkog izlaganja.

⁹ Galileo di Vincenzo Bonaiuti de' Galilei, 1564-1642, talijanski matematičar, fizičar, astronom i filozof. Odigrao je značajnu ulogu u razvoju moderne znanosti.

¹⁰ Citat preuzet iz knjige Šikić, Zvonimir: *Filozofija Matematike*, Školska knjiga, Zagreb, 1995., str. 31.

Literatura

1. D. Adnađević i Z. Kadelburg: *Matematička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.
2. M.Hohenwarter i J. Hohenwarter: *GeoGebra Help: Official Manual 3.2*. [pdf.],
3. International GeoGebra Institute, sl., 2009., URL: <http://www.geogebra.org/help/docuen.pdf>. [pristupljeno: 28.08.2014].
4. J. Stewart: *Calculus*, 7th ed., Brooks/Cole, Pacific Grove, 2011.
5. Z. Šikić: *Filozofija Matematike*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
6. Š. Znam, L. Bukovsky, J. Hejny, J. Hvorecky i R. Beloslav: *Pogled u povijest matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
7. V. A. Zorič: *Matematičeskii analiz, Tom I*, Nauka, Moskva, 1984.

Recenzent: dr. sc. Dževad Zečić, UNZE, BiH

Lektor: autori rada