

Hermina Alajbegović
Almir Huskanović
Safet Hamedović

IHARINA ZETA FUNKCIJA ZA KOMPLETNE GRAFOVE I NJIHOVU KOMBINACIJU

Sažetak

U ovom radu istražujemo primjenu Iharine zeta funkcije na kompletne grafove i na grafove nastale proširenjem unijom dva kompletna grafa. Iharina zeta funkcija služi kao alat za analizu cikličnih struktura grafova, pružajući uvid u cikluse različitih dužina unutar grafova. Cilj je izračunati Iharine zeta funkcije za kompletne grafove i grafove dobivene kombinacijom dva takva grafa, te ispitati kako se strukturalne informacije iz pojedinačnih grafova odražavaju u zeta funkciji složenijeg grafa. Naša analiza pokazuje da broj ciklusa dužine 3, 4 i 5 u složenijim grafovima raste prema pravilima koja zavise o dužini ciklusa i broju čvorova grafa, čime se potvrđuje mogućnost predviđanja rasta broja ciklusa na osnovu ovih koeficijenata.

Ključne riječi: koeficijenti Iharine zeta funkcije, prosti ciklusi, kompletni grafovi

Uvod

Iharina zeta funkcija predstavlja algebarski alat koji povezuje topološke osobine grafa sa svojstvenim vrijednostima njegove matrice susjedstva. Ova funkcija je analogna Riemannovoj zeta funkciji iz teorije brojeva, ali je prilagođena za analizu grafova. U teoriji grafova, Iharina zeta funkcija omogućava proučavanje cikličnih struktura grafova, pružajući dubinski uvid u njihove karakteristike.

U ovom radu, izvest ćemo Iharinu zeta funkcije za potpuni graf K_n koristeći svojstvene vrijednosti matrice susjedstva ovog grafa. Također, analizirat ćemo graf koji nastaje dodavanjem novih ivica između dva kompletna grafa, G_1 i G_2 , oba sa n čvorova. Cilj je izračunati Iharinu zeta funkciju za ove složenije grafove i istražiti može li se korisna informacija o zeta funkciji složenog grafa izvesti iz zeta funkcija pojedinačnih grafova G_1 i G_2 .

Definicija ranga ciklusa i Iharine zeta funkcije

Definicija 1. Za dati graf $G = (V, E)$, gdje je V skup čvorova, a E skup ivica, Iharina zeta funkcija je definirana kao analitički nastavak beskonačnog proizvoda:

$$\zeta_G(u) = \prod_p \frac{1}{1 - u^{L(p)}}, \quad (1)$$

gdje:

- p predstavlja zatvoreni geodetski ciklus (ili primitivni ciklus) u grafu G ,
- $L(p)$ je dužina ciklusa p ,
- Proizvod se uzima preko svih primitivnih ciklusa u grafu, gdje se ciklusi koji se razlikuju samo po rotaciji smatraju ekvivalentnim.

Ova zeta funkcija omogućava praćenje cikličnih struktura u grafu i koristi se za spektralnu analizu i druge grane matematičke teorije grafova.

Definicija 2. Rang ciklusa (poznat i kao ciklomatski broj) grafa G , označen sa $r(G)$, predstavlja broj nezavisnih ciklusa u grafu. On se može definisati kao minimalan broj ivica koje je potrebno ukloniti da bi se svi ciklusi u grafu prekinuli, čime graf postaje drvo ili šuma. Rang ciklusa se računa prema formuli:

$$r(G) = |E| - |V| + c, \quad (2)$$

gdje su:

- $|E|$ broj ivica u grafu,
- $|V|$ broj čvorova,
- c broj povezanih komponenti grafa.

Generalizovana formula za Iharinu zeta funkciju

Iharina zeta funkcija može se računati direktno brojanjem prostih ciklusa u grafu ili korištenjem determinantne formule koju je dao Bass u svom radu [1].

Teorema 1 (Bass). *Determinantna formula za Iharinu zeta funkciju grafa X je:*

198

$$\zeta(u, X)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(I - A_X u + Q_X u^2), \quad (3)$$

gdje je:

- $r - 1 = |E| - |V|$,
- A_X matrica susjedstva grafa X ,
- Q_X dijagonalna matrica čiji je i -ti element jednak $\deg(v_i) - 1$, odnosno, $Q_X = \text{diag}(\deg(v_i) - 1)$, gdje $\deg(v_i)$ predstavlja stepen čvora v_i .

S obzirom na to da formula koristi dijagonalnu matricu Q_X koja uključuje stepen svakog čvora, ona se može primijeniti na bilo koji graf, bez obzira na njegovu strukturu.

Iharina zeta funkcija za kompletne grafove

Kompletni graf K_n je $n - 1$ –regularni graf s n čvorova, $\binom{n}{2}$ ivica a za elemente matrice susjedstva A važi $a_{ij} = 1$ za $i \neq j$ i $a_{ij} = 0$ ako je $i = j$. Matrica susjedstva A potpunog grafa K_n je data kao:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice susjedstva A su: $\lambda_1 = n - 1$ (višestrukosti 1), $\lambda_2 = -1$ (višestrukosti $n - 1$) ([3]).

Vrijednost determinante matrice $M(u) = I - Au + (n - 1)u^2I$ iz formule (3) je jednaka proizvodu njenih svojstvenih vrijednosti. Svojstvene vrijednosti matrice $M(u)$ možemo dobiti iz svojstvenih vrijednosti matrice A .

Dakle, determinanta matrice $M(u)$ može se zapisati kao:

$$\det(M(u)) = (1 - (n-1)u + (n-2)u^2) \cdot (1 + u + (n-2)u^2)^{n-1}.$$

Rang ciklusa grafa K_n se računa prema formuli:

$$r(K_n) = |E| - |V| + 1 = \binom{n}{2} - n + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Kombinujući sve ove rezultate, dobivamo Iharinu zeta funkciju za kompletni graf K_n :

$$\zeta_{K_n}(u) = \frac{1}{(1-u^2)^{\frac{n(n-3)}{2}} (1 - (n-1)u + (n-2)u^2) \cdot (1 + u + (n-2)u^2)^{n-1}}.$$

Primjer za K_3

Razmotrimo konkretan primjer za K_3 , kompletni graf sa 3 čvora. Njegova matrica susjedstva ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -1$ (višestrukosti 2).

Determinanta matrice $M(u)$ za K_3 je:

$$\det(M(u)) = (1 - 2u + u^2) \cdot (1 + u + u^2)^2 = (1 - u^3)^2.$$

Rang ciklusa za K_3 je:

$$r(K_3) = \binom{3}{2} - 3 + 1 = 1.$$

Iharina zeta funkcija za K_3 je:

$$\zeta_{K_3}(u) = \frac{1}{(1 - u^3)^2}.$$

Ako bi računali zeta funkciju ovog grafa direktno prema definiciji dobili bi isti izraz jer graf K_3 ima samo dva primitivna ciklusa dužine tri.

Primjer za K_5

Na isti način kao što je opisano u prethodnom paragrafu dolazimo do Ihaine zeta funkcije potpunog grafa sa 5 čvorova, odnosno do njoj recipročne funkcije. Izraz za recipročnu zeta funkciju je dat sa:

$$\zeta_{K_5}(u)^{-1} = -(-1 + u^2)^5 (1 - 4u + 3u^2) (1 + u + 3u^2)^4.$$

Tijekom evaluacije, razvijeni oblik Iharine zeta funkcije za kompletni graf s pet čvorova je:

$$\begin{aligned}\zeta_{K_5}(u)^{-1} = & 1 - 20u^3 - 30u^4 - 24u^5 + 70u^6 + 240u^7 + 165u^8 - 140u^9 - 708u^{10} - 660u^{11} \\ & + 505u^{12} + 1200u^{13} + 870u^{14} - 776u^{15} - 1710u^{16} + 180u^{17} + 1080u^{18} \\ & - 243u^{20}\end{aligned}$$

Za ovu svrhu zgodno je koristiti softver kao što je *Wolfram Mathematica*.

Objasnit ćemo značenje koeficijenata uz u^3 , u^4 , u^5 , u^6 te koeficijent uz najveći stepen polinoma. Zbog toga će nam trebati sljedeće definicije, lema i korolar koji se mogu pronaći u [5]:

Lema 1. *Neka je T matrica susjedstva orijentisanog linijskog povezanog grafa X . Karakteristični polinom matrice T možemo zapisati kao:*

$$\chi_T(u) = \det(T - uI) = u^{2m} + c_1u^{2m-1} + \dots + c_{2m},$$

gdje je m broj ivica u grafu X . Zatim, recipročna Iharina zeta funkcija grafa X se može napisati kao:

$$\frac{1}{Z_X(u)} = 1 + c_1u + c_2u^2 + c_3u^3 + \dots + c_{2m}u^{2m}.$$

Definicija 3. *Obim grafa X , označen kao $g(X)$, je dužina najkraćeg ciklusa (najmanji broj ivica u ciklusu) u grafu X . Ako graf nema cikluse, tada kažemo da je obim beskonačan.*

Teorema 2 (Czarneski). *Neka je X graf i $Z_X(u)$ njegova Iharina zeta funkcija, kako je napisano gore. Neka je $n = |V|$, a $m = |E|$. Označavamo sa $d(v)$ stepen čvora v , tj. broj ivica s kojima je v povezan. Tada:*

1. $-c_1$ je dvostruki broj petlji u X .
2. $c_{2m} = (-1)^{m-n} \prod_{v_i \in V} (d(v_i) - 1)$.
- 3.

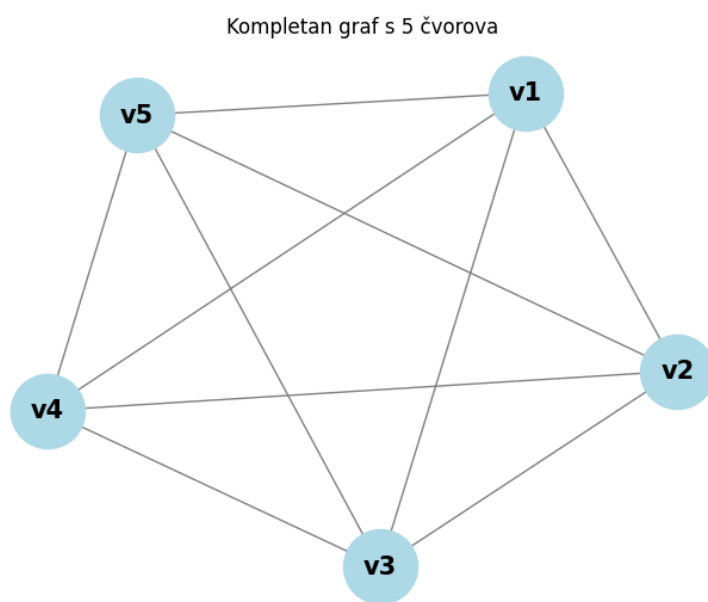
Korolar 1. *Neka je X povezan graf sa obimom g i Iharinom zeta funkcijom, kako je gore definirano. Tada:*

1. Kada je $i < g$, koeficijent $c_i = 0$.
2. Kada je $g \leq i < 2g$, koeficijent c_i je negativan dvostruki broj i -uglova u X .
3. Kada je $2g \leq i < 3g$, koeficijent c_i je zbir sljedećih elemenata:
 - Negativan dvostruki broj i -uglova u X .
 - Četverostruki broj parova između k -ugla i $(i - k)$ -ugla koji nemaju zajedničku ivicu, za $g \leq k < 2g$.

- Dvostruki broj parova k -ugla i $(i - k)$ -ugla koji dijele najmanje jednu ivicu i kompatibilni su, za $g \leq k < 2g$.
- Dvostruki broj parova k_1 -ugla i k_2 -ugla koji nemaju zajedničku ivicu i koji imaju put dužine $\frac{1}{2}(i - k_1 - k_2)$ između njih i kompatibilni su, za $k_1 + k_2 < 3g$.

Definicija 4. Neka je X graf sa dva ciklična podgrafa C_n i C_m . Kažemo da su C_n i C_m kompatibilni ako je moguće orijentirati ivice grafa X tako da oba ciklusa C_n i C_m postanu orijentirani ciklusi.

Iharina zeta funkcija se obično primjenjuje na orijentirane grafove, ali može se koristiti i za neorijentirane grafove, pretvaranjem svake ivice u dvije orijentirane ivice koje idu u suprotnim smjerovima. Ova konverzija omogućava da se zeta funkcija izračuna i za neorijentirane grafove, kao što su kompletni grafovi K_n . U nastavku ćemo prikazati kako se prethodna lema, teorema i korolar mogu primijeniti na potpune grafove, konkretno K_5 .



Slika 1. Graf K_5

Kompletan graf K_5 ima 5 čvorova i 10 ivica. Kada ga tretiramo kao orijentisani graf, svaka od ovih 10 ivica se zamjenjuje sa dvije orijentisane ivice, što rezultira sa ukupno 20 orijentisanih ivica. Nakon konverzije u orijentisani graf, možemo koristiti Lemu 1. da dobijemo karakteristični polinom za Iharinu zeta funkciju. Karakteristični polinom matrice susjedstva orijentiranog linijskog grafa za K_5 bit će stepena $2m = 20$, jer postoji 10 originalnih ivica u grafu. Polinom će imati oblik:

$$\chi_T(u) = u^{20} + c_1 u^{19} + c_2 u^{18} + \dots + c_{20}.$$

Recipročna zeta funkcija tada ima oblik:

$$\frac{1}{Z_{K_5}(u)} = 1 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots + c_{20} u^{20}.$$

Prema Korolaru 1 koeficijent uz u^3 , u^4 i u^5 uzet bez predznaka predstavlja broj primitivnih ciklusa dužine 3, 4 i 5 respektivno. Kako bi se u to uvjerili napisali smo kod u *Pythonu* koji broji cikluse pomenute dužine.

```

import networkx as nx
# Kreiramo kompletan graf s 5 čvorova
n = 5
G = nx.complete_graph(n)

# Funkcija za brojenje primitivnih ciklusa dužine k
def count_simple_cycles(graph, length, directed=False):
    if directed:
        # Kreiramo orijentirani graf
        directed_graph = graph.to_directed()
        cycles = list(nx.simple_cycles(directed_graph))
    else:
        cycles = list(nx.simple_cycles(graph))

    count = 0
    for cycle in cycles:
        if len(cycle) == length:
            count += 1
    return count

# Brojanje primitivnih ciklusa dužine 3, 4 i 5 bez orijentacije
cycles_length_3 = count_simple_cycles(G, 3, directed=False)
cycles_length_4 = count_simple_cycles(G, 4, directed=False)
cycles_length_5 = count_simple_cycles(G, 5, directed=False)

# Brojanje primitivnih ciklusa dužine 3, 4 i 5 s orijentacijom
cycles_length_3_directed = count_simple_cycles(G, 3, directed=True)
cycles_length_4_directed = count_simple_cycles(G, 4, directed=True)
cycles_length_5_directed = count_simple_cycles(G, 5, directed=True)

# Ispis rezultata
print(f'Broj primitivnih ciklusa dužine 3 (bez orijentacije): {cycles_length_3}')
print(f'Broj primitivnih ciklusa dužine 4 (bez orijentacije): {cycles_length_4}')
print(f'Broj primitivnih ciklusa dužine 5 (bez orijentacije): {cycles_length_5}')

print(f'Broj primitivnih ciklusa dužine 3 (s orijentacijom): {cycles_length_3_directed}')
print(f'Broj primitivnih ciklusa dužine 4 (s orijentacijom): {cycles_length_4_directed}')
print(f'Broj primitivnih ciklusa dužine 5 (s orijentacijom): {cycles_length_5_directed}')

```

Izlaz koda:

```

Broj primitivnih ciklusa dužine 3 (bez orijentacije): 10
Broj primitivnih ciklusa dužine 4 (bez orijentacije): 15
Broj primitivnih ciklusa dužine 5 (bez orijentacije): 12
Broj primitivnih ciklusa dužine 3 (s orijentacijom): 20
Broj primitivnih ciklusa dužine 4 (s orijentacijom): 30
Broj primitivnih ciklusa dužine 5 (s orijentacijom): 24

```

Sljedeći kod u *Pythonu* kao izlaz daje broj parova trouglova u K_5 koji nemaju zajedničku ivicu i onih koji imaju.

```
from itertools import combinations

# Formiramo skup čvorova
nodes = [1, 2, 3, 4, 5]

# Formiramo sve moguće trouglove (kombinacije od 3 čvora)
triangles = list(combinations(nodes, 3))

# Brojimo parove trouglova sa jednim ili dva zajednička čvora
one_common = 0
two_common = 0

# Ispitujemo sve parove trouglova
for i in range(len(triangles)):
    for j in range(i + 1, len(triangles)):
        common_vertices = set(triangles[i]).intersection(set(triangles[j]))
        if len(common_vertices) == 1:
            one_common += 1
        elif len(common_vertices) == 2:
            two_common += 1

# Ispis rezultata
print(f"Broj parova sa jednim zajedničkim čvorom: {one_common}")
print(f"Broj parova sa dva zajednička čvora: {two_common}")
```

Izlaz koda:

```
Broj parova sa jednim zajedničkim čvorom: 15
BROJ PAROVA SA DVA ZAJEDNIČKA ČVORA:
```

Primijetimo da smo do broja primitivnih ciklusa i broja parova posmatranih trouglova lako mogli doći koristeći osnovne formule iz kombinatorike budući da kompletan graf ima dosta jednostavnu strukturu. Primjeri kodova u *Pythonu* su više ilustracija kako možemo koristiti ovaj softver za prebrojavanje primitivnih ciklusa što može biti posebno korisno kod grafova sa složenijom strukturom.

Izračunat ćemo broj primitivnih ciklusa dužine 4 koristeći kombinatoriku. Broj načina da izaberemo jednu četvorku budući da su svi vrhovi međusobno povezani je

$$\binom{5}{4} = 5.$$

Čvorovi se mogu pojavljivati bilo kojim redoslijedom, otuda dobivamo da za jednu izabranu četvorku imamo $4!=24$ ciklusa. Ciklusi koji se mogu dobiti jedan iz drugog rotacijom smatraju se ekvivalentnim te dolazimo do $24/4=6$ primitivnih ciklusa za jednu izabranu četvorku. Kako možemo izabrati 5 različitih četvorki, najzad dobivamo da u K_5 postoji 30 primitivnih ciklusa dužine 4. Analogno računamo broj primitivnih ciklusa dužine 3 i 5 te broj parova trouglova bez zajedničke ivice i sa zajedničkom ivicom..

Koeficijent uz najveći stepen u recipročnoj zeta funkciji lako možemo izračunati i na osnovu Teoreme 2.

Koeficijent uz u^6 u Iharioj zeta funkciji je dat sljedećom relacijom:

$$4 \cdot (\text{broj parova trouglova bez zajedničke ivice}) \\ + 2 \cdot (\text{broj kompatibilnih parova trouglova sa jednom zajedničkom ivicom}) = 70$$

Budući da je broj parova trouglova bez zajedničke ivice 15, slijedi da ima 5 parova kompatibilnih trouglova s jednom zajedničkom ivicom u K_5 . Da bismo razumjeli zašto je broj kompatibilnih parova tačno 5, možemo analizirati strukturu K_5 : Potpuni graf K_5 sadrži

$$\binom{5}{4} = 5$$

podgrafova K_4 . Svaki K_4 sadrži

$$\binom{4}{3} = 4$$

trougla. Broj parova trouglova koji dijele jednu zajedničku ivicu unutar svakog K_4 je

$$\binom{4}{2} = 6.$$

Kada orijentiramo ivice u K_4 moguće je dobiti samo jedan par kompatibilnih trouglova. Budući da imamo 5 podgrafova K_4 u K_5 dolazimo do pet kompatibilnih parova trouglova s jednom zajedničkom ivicom.

Izvođenje Iharine zeta funkcije za specifičan n -regularan graf

Neka su $G' = (V', E')$ i $G'' = (V'', E'')$ potpuni grafovi s n čvorova, pri čemu je

$$V' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\} \text{ i } V'' = \{x''_1, x''_2, \dots, x''_n\}.$$

Definišimo graf $G = (V, E)$ tako što je:

$$V = V' \cup V'' \\ E = E' \cup E'' \cup \{\{x'_1, x''_1\}, \{x'_2, x''_2\}, \dots, \{x'_n, x''_n\}\}$$

Graf G ima ukupno $2n$ čvorova i n^2 ivica, te je n -regularan graf.

Svojstvene vrijednosti matrice susjedstva grafa G su: $\{n, n-2, 0, -2\}$ pri čemu su $\lambda_1 = n$ i $\lambda_2 = n-2$ svojstvene vrijednosti višestrukosti 1, dok su preostale dvije svojstvene vrijednosti višestrukosti $n-1$ ([4]).

Izvest ćemo Iharinu zeta funkciju za graf G pomoću formule (3).

Za graf G :

$$|V| = 2n$$

$$|E| = |E'| + |E''| + n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = n(n-1) + n = n^2$$

Dakle, ciklomatski broj r je:

$$r = |E| - |V| + 1 = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$$

Faktor $(1-u^2)^{r-1}$ postaje:

$$(1-u^2)^{(n-1)^2-1} = (1-u^2)^{n^2-2n}.$$

Korištenjem svojstvenih vrijednosti matrice susjedstva A grafa G , determinanta se može izraziti kao proizvod polinoma povezanih sa svakom svojstvenom vrijednošću:

$$\det(I - Au + Qu^2) = \prod_{i=1}^{2n} (1 - \lambda_i u + (n-1)u^2),$$

gdje su λ_i svojstvene vrijednosti matrice A .

Zamjenjujući poznate svojstvene vrijednosti:

$$\begin{aligned} \det(I - Au + Qu^2) &= (1 - nu + (n-1)u^2) \cdot (1 - (n-2)u + (n-1)u^2) \\ &\quad \cdot (1 + (n-1)u^2)^{n-1} \cdot (1 + 2u + (n-1)u^2)^{n-1} \end{aligned}$$

Recipročna vrijednost Iharine zeta funkcija grafa G je:

$$\begin{aligned} Z_G(u)^{-1} &= (1 - u^2)^{n^2-2n} \cdot (1 - nu + (n-1)u^2) \cdot (1 - (n-2)u + (n-1)u^2) \\ &\quad \cdot (1 + (n-1)u^2)^{n-1} \cdot (1 + 2u + (n-1)u^2)^{n-1}. \end{aligned}$$

Kartezijski proizvod grafova

Kartezijski proizvod dva grafa $X_1 \times X_2$ je graf X , gdje je skup čvorova jednak $V_{X_1} \times V_{X_2}$ i dva čvora (P_1, P_2) i (Q_1, Q_2) su susjedna ako vrijedi:

- 1) $P_1 = Q_1$ i P_2 i Q_2 su susjedni u grafu X_2 , ili
- 2) $P_2 = Q_2$ i P_1 i Q_1 su susjedni u grafu X_1 .

Iz ove definicije možemo vidjeti da je stepen čvora $(P, Q) \in (X_1 \times X_2)$ jednaka sumi stepena čvorova P i Q . Također, lako je vidjeti da, kada su X_1 i X_2 povezani grafovi da je tada i $X_1 \times X_2$ povezan graf.

Propozicija 1. [2] Pretpostavimo da je X_i povezan graf i neka su spektri X_1 i X_2 dati kao:

$$\text{Spec}(X_1) = \{\lambda_i; 1 \leq i \leq n_1\}, \text{Spec}(X_2) = \{\mu_j; 1 \leq j \leq n_2\}.$$

Tada vrijedi:

$$\text{Spec}(X_1 \times X_2) = \{\lambda_i + \mu_j; 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2\}.$$

Ako je, dodatno, X_i regularan graf sa valencijom k_i (za $i = 1, 2$), tada imamo:

$$Z_{X_1 \times X_2}(u)^{-1} = (1 - u^2)^{\frac{(q-1)n_1n_2}{2}} \prod_{i=1}^{n_1} \prod_{j=1}^{n_2} [1 - (\lambda_i + \mu_j)u + qu^2],$$

gdje je $q = k_1 + k_2 - 1$.

Odredit ćemo svojstvene vrijednosti matrice susjedstva grafa $K_n \times K_n$ na osnovu prethodne propozicije. Spektar $K_n \times K_n$ je:

$$\text{Spec}(K_n \times K_n) = \{2(n-1), n-2(\text{višestrukosti } 2(n-1)), -2(\text{višestrukosti } (n-1)^2)\}.$$

Stepen čvorova u grafu $K_n \times K_n$ je jednak $(n-1) + (n-1) = 2n-2$.

Sada možemo primijeniti formulu za recipročnu zeta funkciju:

$$Z_{K_n \times K_n}(u)^{-1} = (1 - u^2)^{(n-2)n^2} \prod_{i,j} [1 - (\lambda_i + \mu_j)u + (2n-3)u^2].$$

Kao što smo naveli ranije, svojstvene vrijednosti $\lambda_i + \mu_j$ su $2(n-1)$, $n-2$, i -2 , sa odgovarajućim višestrukostima. Dakle, zeta funkcija za Kartezijski proizvod dva kompletna grafa $K_n \times K_n$ glasi:

$$\begin{aligned} Z_{K_n \times K_n}(u)^{-1} &= (1 - u^2)^{(n-2)n^2} [1 - 2(n-1)u \\ &\quad + (2n-3)u^2] \prod_{k=1}^{2(n-1)} [1 - (n-2)u + (2n-3)u^2] \\ &\quad \cdot \prod_{l=1}^{(n-1)^2} [1 + 2u + (2n-3)u^2]. \end{aligned}$$

Analiza koeficijenata Iharine zeta funkcije različitih grafova

Koeficijente uz u^5 , u^4 , u^3 , u^2 , u i slobodne članove polinoma recipročne Iharine zeta funkcije za kompletan graf, proširenu uniju, te Kartezijanski proizvod dva kompletna grafa izračunali smo koristeći sljedeći kod u Wolfram Mathematici:

```
In[1]:= (*Definišemo recipročnu Iharinu zeta funkciju kompletnog grafa*)
zetaComplete[n_, u_] :=
  (1 - u^2) ^ ((n (n - 3)) / 2) * (1 - (n - 1) u + (n - 2) u^2) * (1 + u + (n - 2) u^2) ^ (n - 1)
(*Definišemo recipročnu Iharinu zeta funkciju proširene unije
kompletnih grafova*)
zetaUnion[n_, u_] := (1 - u^2) ^ (n^2 - 2 n) * (1 - n u + (n - 1) u^2) *
  (1 - (n - 2) u + (n - 1) u^2) * (1 + (n - 1) u^2) ^ (n - 1) *
  (1 + 2 u + (n - 1) u^2) ^ (n - 1)
(*Definišemo recipročnu Iharinu zeta funkciju kartezijanskog proizvoda
kompletnih grafova*)
zetaCartesian[n_, u_] :=
  (1 - u^2) ^ ((n - 2) n^2) * (1 - 2 (n - 1) u + (2 n - 3) u^2) *
  Product[(1 - (n - 2) u + (2 n - 3) u^2), {k, 1, 2 (n - 1)}] *
  Product[(1 + 2 u + (2 n - 3) u^2), {l, 1, (n - 1)^2}]
(*Funkcija za dobijanje koeficijenata polinoma recipročne zeta
funkcije do željenog stepena*)
getSeriesCoefficients[func_, n_, u_, maxDegree_] :=
  Table[SeriesCoefficient[func[n, u], {u, 0, i}], {i, 0, maxDegree}]
(*Generišemo prva 4 koeficijenata za svaku funkciju*)
coefComplete = Expand[getSeriesCoefficients[zetaComplete, n, u, 5]]
coefUnion = Expand[getSeriesCoefficients[zetaUnion, n, u, 5]]
coefCartesian = Expand[getSeriesCoefficients[zetaCartesian, n, u, 5]]

Out[5]= {1, 0, 0, -\frac{2n}{3} + n^2 - \frac{n^3}{3}, \frac{3n}{2} - \frac{11n^2}{4} + \frac{3n^3}{2} - \frac{n^4}{4}, -\frac{24n}{5} + 10n^2 - 7n^3 + 2n^4 - \frac{n^5}{5}}

Out[6]= {1, 0, 0, -\frac{4n}{3} + 2n^2 - \frac{2n^3}{3}, 4n - \frac{13n^2}{2} + 3n^3 - \frac{n^4}{2}, -\frac{68n}{5} + 26n^2 - 16n^3 + 4n^4 - \frac{2n^5}{5}}

Out[7]= {1, 0, 0, -\frac{4n^2}{3} + 2n^3 - \frac{2n^4}{3}, \frac{5n^2}{2} - \frac{9n^3}{2} + \frac{5n^4}{2} - \frac{n^5}{2}, -\frac{28n^2}{5} + 10n^3 - 6n^4 + 2n^5 - \frac{2n^6}{5}}
```

Slika 2.

Na sljedećoj slici prikazani su koeficijenti uz u^5 , u^4 , u^3 , u^2 , u i slobodni članovi polinoma recipročne Iharine zeta funkcija za posmatrane grafove pri $n = 5$, kao i razlike između koeficijenata polinoma kompletnog grafa i odgovarajućih polinoma za proširenu uniju i Kartezijanski proizvod:

```

In[8]:= (*Generisanje prvih pet koeficijenata za n=5*)

In[9]:= coefComplete5 = getSeriesCoefficients[zetaComplete, 5, u, 5]
coefUnion5 = getSeriesCoefficients[zetaUnion, 5, u, 5]
coefCartesian5 = getSeriesCoefficients[zetaCartesian, 5, u, 5]

Out[9]= {1, 0, 0, -20, -30, -24}

Out[10]= {1, 0, 0, -40, -80, -168}

Out[11]= {1, 0, 0, -200, -500, -2640}

In[12]:= diffUnion = coefComplete - coefUnion
diffCartesian = coefComplete - coefCartesian

Out[12]= {0, 0, 0,  $\frac{2n}{3} - n^2 + \frac{n^3}{3}$ ,  $-\frac{5n}{2} + \frac{15n^2}{4} - \frac{3n^3}{2} + \frac{n^4}{4}$ ,  $\frac{44n}{5} - 16n^2 + 9n^3 - 2n^4 + \frac{n^5}{5}$ }

Out[13]= {0, 0, 0,  $-\frac{2n}{3} + \frac{7n^2}{3} - \frac{7n^3}{3} + \frac{2n^4}{3}$ ,
 $\frac{3n}{2} - \frac{21n^2}{4} + 6n^3 - \frac{11n^4}{4} + \frac{n^5}{2}$ ,  $-\frac{24n}{5} + \frac{78n^2}{5} - 17n^3 + 8n^4 - \frac{11n^5}{5} + \frac{2n^6}{5}$ }

```

Slika 3.

Razlike u broju ciklusa između proširene unije, Kartezijuskog proizvoda i kompletnog grafa mogu se aproksimirati korištenjem Big O notacije. Ova aproksimacija omogućava analizu asimptotskog ponašanja razlika kada broj čvorova raste. U sljedećoj tabeli prikazan je aproksimativni rast broja ciklusa dužine 3, 4 i 5 u proširenoj uniji i Kartezijском proizvodu u odnosu na kompletni graf:

Ciklus	Razlika sa proširenom unijom	Razlika sa Kartezijским proizvodom
2	0	0
3	$O(n^3)$	$O(n^4)$
4	$O(n^4)$	$O(n^5)$
5	$O(n^5)$	$O(n^6)$

Tabela 1.

Ove aproksimacije ukazuju na brži rast broja ciklusa u složenijim grafovima kako broj čvorova raste. Primijetimo da kod proširene unije stepen polinomskog rasta odgovara dužini ciklusa, dok je kod Kartezijskog proizvoda stepen polinomskog rasta za jedan veći od dužine ciklusa.

Zaključak

U ovom radu istražili smo primjenu Iharine zeta funkcije na kompletne grafove, Kartezijski proizvod kompletnih grafova i grafove nastale njihovom proširenom unijom. Analizom cikličnih struktura kroz Iharinu zeta funkciju dobili smo uvid u to kako se strukturalne karakteristike grafova odražavaju na njihove zeta funkcije. Posebno smo ispitali kako dodavanje novih ivica između dva kompletna grafa utiče na promjene zeta funkcije, u poređenju sa funkcijama originalnih grafova.

Rezultati pokazuju da zeta funkcija složenijeg grafa obuhvata informacije koje ne samo da reflektuju individualne ciklične strukture početnih grafova, već uključuju i nove cikluse nastale unijom grafova. Ovo ukazuje na potencijal zeta funkcije kao alata za razlikovanje različitih grafova, čak i kada dijele slične strukturne karakteristike.

Literatura

- [1] H. Bass, *The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice*, International Journal of Mathematics, 3(06):717–797, 1992.
- [2] K. Hashimoto, "Zeta Functions of Finite Graphs and Representations of p-Adic Groups," Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 15, pp. 211–280, 1989.
- [3] A. Huskanović, *Svojstvene vrijednosti regularnih grafova*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Zenici, no. 17, 261–267, 2019, ISSN2637-2088.
- [4] S. Penjić, D. Zeček, H. Alajbegović, *Konstrukcije dvostruko regularnih grafova*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Zenici, no. 17, 268–276, 2019, ISSN2637-2088.
- [5] G. Scott and C. Storm, *The coefficients of the Ihara zeta function*, A journal of mathematics, Mathematical sciences publishers, 2008, Vol. 1, No. 2.

IHARA ZETA FUNCTION OF COMPLETE GRAPHS AND THEIR COMBINATIONS

Abstract

In this paper we investigate the application of Ihara zeta function to complete graphs and to graphs formed by the extended union of two complete graphs. Ihara zeta function serves as a tool for analyzing the cycle structures of graphs, providing insight into cycles of different lengths within graphs. The goal is to calculate Ihara zeta functions for complete graphs and for graphs obtained by combining two such graphs, and to examine how structural information from individual graphs is reflected in the zeta function of a more complex graph. Our analysis shows that the number of cycles of length 3, 4 and 5 in more complex graphs grows according to the rules that depend on the length of the cycle and the number of graph nodes, which confirms the possibility of predicting the growth of the number of cycles based on these coefficients.

Keywords: *coefficients of Ihara zeta function, prime cycles, complete graphs*