

Naida Bikić
Dina Kamber
Sanela Nesimović

GeoGebra u nastavi matematike - grafici linearnih i eksponencijalnih funkcija

Sažetak: Cilj ovog rada je ispitati utjecaj korištenja besplatnog edukativnog softvera GeoGebra u I i II razredu srednjih škola u obradi grafika linearnih i eksponencijalnih funkcija. Ukupan uzorak od 161 učenika odabran je iz tri gimnazije u Sarajevu. U eksperimentalnoj grupi (81) učenici su podučavani korištenjem GeoGebre, dok je u kontrolnoj grupi (80) podučavano tradicionalnim načinom rada. Na kraju eksperimenta, učenička postignuća mjerena su finalnim testom. Rezultat upućuje da GeoGebra nije bila efektivna za podučavanje i učenje grafika linearnih i eksponencijalnih funkcija.

Ključne riječi: geogebra; linearna funkcija; eksponencijalna funkcija

Abstract: The aim of this study was to examine the impact of using the free educational softwer program „GeoGebra“ on 1st and 2nd grade students and their achievement in learning graphics of linear and exponential functions. A total of 161 students were selected three gimansiums locatesd in Sarajevo. The experimental group (81) was thaught graphics of linear and exponential functions using GeoGebra, while the control group (80) was thaught utilizing traditional teaching methods. At the end of the treatment, students' mathematics achievement were measured using a final test. The results has indicated that GeoGebra was not an effective tool for teachig and learning graphics of linear and exponential functions.

Key words: GeoGebra; linear functions; exponential functions

UVOD

Razvoj tehnologije je doveo do napretka na mnogim poljima, pa se tako očekivalo da će tehnologija imati veliki utjecaj i na nastavu. Uprkos mnogobrojnim prednostima korištenja tehnologije u matematičkom obrazovanju, proces uključivanja tehnologije u učionice se pokazao kao spor i složen (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis & Lavicza, 2008). Sam pristup modernoj tehnologiji ne znači da će nastavnici istu i koristiti u nastavi (Hohenwater & Lavicza, 2007).

Smatra se da bi nastavnici više koristili IT tehnologiju u nastavi matematike ako bi im se omogućili kvalitetni edukativni seminari te ako bi imali podršku kolega, tj. ako bi i njihove kolege koristile IT tehnologiju (Hohenwater & Lavicza, 2007).

Edukativni program koji je sve popularniji među nastavnicima matematike u školama i profesorima na fakultetima je GeoGebra. GeoGebra je besplatni, dinamički matematički program, koji objedinjuje jednostavnost upotrebe dinamičkih geometrijskih programa i raznovrsne mogućnosti kompjuterskih algebarskih sistema (Hohenwarter et al., 2008). GeoGebra se konstantno usavršava, prevedena je na velik broj jezika, a zajednica njenih korisnika raste iz dana u dan.

Primjene GeoGebre i prednosti njenog korištenja su brojne: koristi se za demonstraciju i lakšu vizualizaciju, za geometrijske konstrukcije, za pomoć u izradi priprema, za izradu interaktivnih web stranica (Hohenwarter & Fuchs, 2004). Osim što olakšava izradu priprema, prednost je što se te pripreme lako mogu iskoristiti i za naredne godine, a primjeri urađeni na času mogu se proslijediti učenicima (Tabak, Burgić & Berberović, 2014). Veoma se jednostavno mogu napraviti interaktivne web stranice, koje sadrže dinamičku figuru sa odgovarajućim objašnjenjima, pitanjima i zadacima za učenike (Hohenwarter, Preiner & Yi, 2007). GeoGebra može uvelike olakšati razumijevanje inače teško razumljivih srednjoškolskih tema, kao što su svođenje vrijednosti trigonometrijskih funkcija na prvi kvadrant (Fortiş, Bînzar & Laiu, 2011), ali ima svoju primjenu i na fakultetima (Böhm, 2009).

Cilj ovog istraživanja je da li će primjena GeoGebre u nastavi matematike imati pozitivan efekt i na srednjoškolske učenike u bh. školama. Nastavne jedinice obrađene u ovom istraživanju su: *Grafik linearne funkcije* i *Grafik eksponencijalne funkcije*.

U nizu istraživanja utvrđeno je da učenici, a kasnije i studenti na fakultetima, imaju dobro znanje o linearnim funkcijama i slabo znanje o eksponencijalnim funkcijama. Rezultati istraživanja (Törner, 2001.) su, između ostalog, pokazali

slabo znanje studenata o eksponencijalnim funkcijama. Kao velik problem u razumijevanju eksponencijalnih funkcija javio se izgled grafika funkcije $y = a^x$, kada se mijenja vrijednost baze a , za $0 < a < 1$ i $a > 1$.

Novi pristup podučavanju o eksponencijalnim funkcijama imaju Makgaka i Sepeng (2013). Poslije (osnovne) usvajanja eksponencijalne funkcije $y = a^x$, ($0 < a \neq 1$), oni učenike podučavaju kako da transformacijama grafika dobiju grafike funkcija $y = a^x + q$, $y = a^{x+c}$, $y = -a^x$ i $y = a^{-x}$. Njihovo istraživanje je pokazalo da učenici podučavani na ovaj način bolje razumiju osobine eksponencijalne funkcije i ostvaruju bolje rezultate.

Cilj našeg istraživanja je utvrditi da li će srednjoškolci postići bolje rezultate ako im nastavne jedinice: *Grafik linearne funkcije* i *Grafik eksponencijalne funkcije* budu predstavljene pomoću apleta napravljenih u GeoGebri. Cilj je i utvrditi koliko nastavnici matematike u BiH koriste edukativne softvere, te da li su uopće prošli neku vrstu obuke za njihovo korištenje. Na osnovu dosadašnjih istraživanja i teoretskog uvoda, imamo sljedeće hipoteze:

(H₁) Učenici podučavani pomoću GeoGebre imat će bolje rezultate od onih podučavanih na tradicionalni način.

(H₂) Učenici podučavani pomoću GeoGebre bolje će savladati transformacije grafika linearnih i eksponencijalnih funkcija od onih podučavanih na tradicionalni način.

Metode rada

a) *Grafik linearne funkcije*: Obuhvaćene su dvije grupe učenika prvog razreda iz tri sarajevske srednje škole, kontrolna i eksperimentalna. Kontrolna grupa je podučavana na tradicionalni način (nastavna sredstva: tabla, kreda i geometrijski pribor), eksperimentalna pomoću GeoGebre (nastavna sredstva: računar, program GeoGebra, projektor). Kontrolna grupa se sastojala od 80 učenika, eksperimentalna od 81 učenika.

Tablica 1. *Raspodjela učenika po školama i grupama*

Škola	Kontrolna	Eksperimentalna	Ukupno
Prva gimnazija	25	24	49
Druga gimnazija	31	33	64
Prva bošnjačka gimnazija	24	24	48
Ukupno	80	81	161

Sa učenicima je rađena nastavna jedinica: Grafik linearne funkcije, tj. oblik grafika funkcije $y = mx + n$ i utjecaj koeficijenta smjera m i odsječka n

na y -osi na izgled grafika funkcije.

Budući da je riječ o gradivu koje je učenicima već poznato iz osnovne škole, prvo su obje grupe imale test predznanja (kojim je ispitano šta već znaju o grafiku linearne funkcije) o grafiku i osobinama linearne funkcije. Test je trajao 10 minuta, a sastojao se od četiri zadatka.

Provođenjem t - testa za velike, nezavisne uzorke došli smo do zaključka da ne postoji statistički značajna razlika u predznanju između ove dvije grupe učenika ($p = 0,08$).

Zatim je predviđeno gradivo u kontrolnoj grupi objašnjeno tradicionalnim načinom rada, dok je u eksperimentalnoj grupi objašnjeno primjenom softverskog paketa GeoGebra (vrijeme trajanja poduke: 20 minuta). Učenicima obje grupe je objašnjeno kako koeficijent smjera i odsječak na y -osi utiče na grafik funkcije odnosno kako da nacrtaju grafik zadane funkcije, te kako za datu pravu liniju odrediti funkciju čiji je to grafik.

Potom je obavljen završni test znanja, sličan testu predznanja (trajanje testa: 10 minuta).

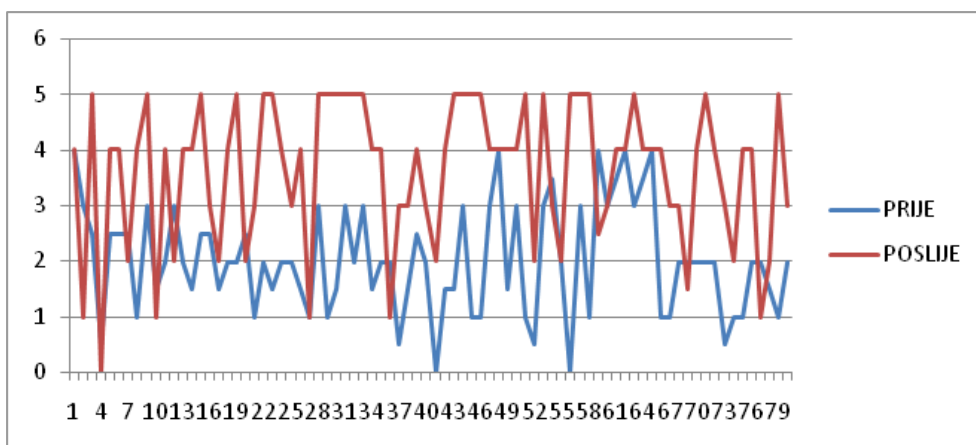
Učenici podučavani pomoću GeoGebre su poslije završnog testa anketirani da bi se vidjelo koliko često su imali priliku matematiku učiti pomoću edukativnih softvera, da li im je nastavna jedinica objašnjena pomoću GeoGebre bila zanimljivija i razumljivija, te da li smatraju da bi bolje i lakše naučili gradivo matematike kad bi im bilo predstavljeno pomoću softvera.

Anketirani su i nastavnici u ove tri škole. Neka od pitanja su se odnosila na njihovu obuku u korištenju edukativnih softvera (na fakultetima, seminarima te samostalnim učenjem), njihov stav o korištenju edukativnih softvera u nastavi te same navike: da li koriste edukativne softvere, da li ih koriste njihove kolege, da li koriste materijale svojih kolega ili materijale sa interneta.

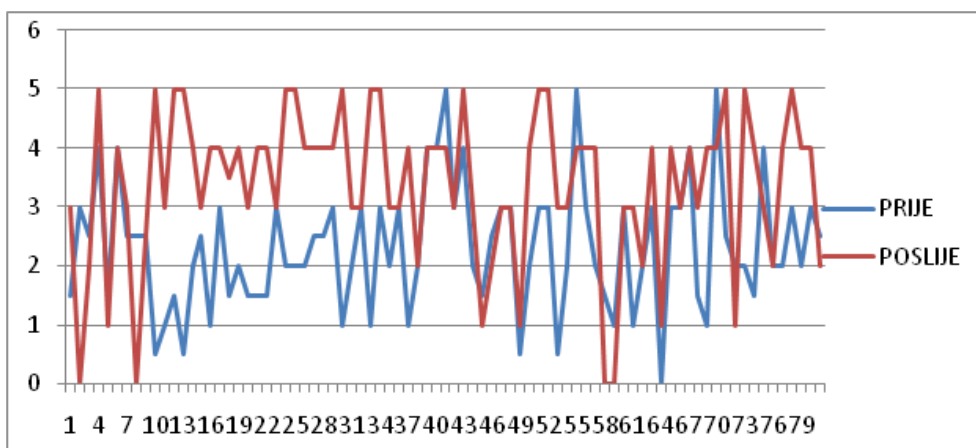
Rezultati istraživanja i njihova interpretacija:

Tablica 2. Rezultati testa predznanja i završnog testa za kontrolnu grupu

Test	N	Srednja vrijednost	SD	t	p
Test predznanja	80	2,03125	0,97	-9,602	0.000
Završni test	80	3,6375	1,29		

Slika 1. *Grafik rezultata kontrolne grupe prije i poslije poduke***Tablica 3.** *Rezultati testa predznanja i završnog testa za eksperimentalnu grupu*

Test	N	Srednja vrijednost	SD	t	p
Test predznanja	81	2,31481	1,07	-6,239	0.000
Završni test	81	3,37037	1,32		

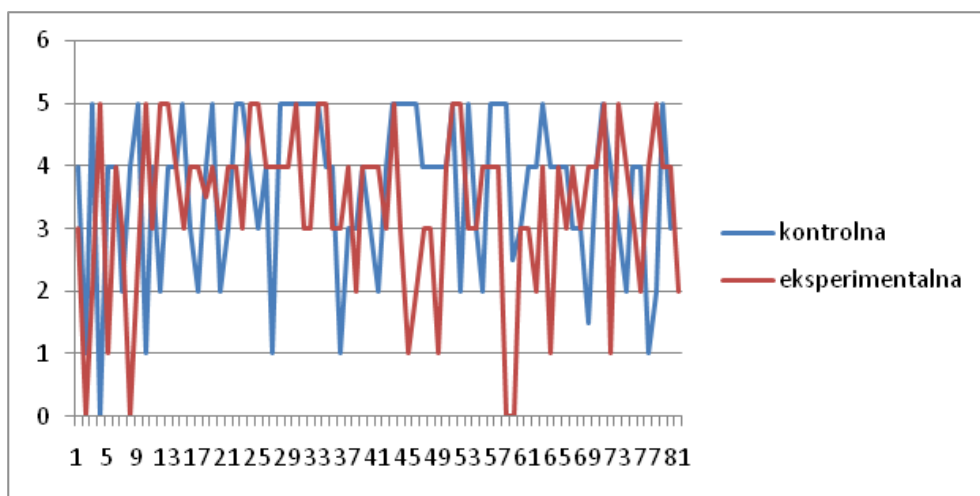
Slika 2. *Grafik rezultata eksperimentalne grupe prije i poslije poduke*

Vidimo iz tablice 2 i tablice 3 da postoji statistički značajna razlika u znanju prije i poslije poduke u obje grupe ($p= 0.000$ i za kontrolnu i za eksperimentalnu grupu).

Tablica 4. Rezultati *t*- testa za nezavisne uzorke pri poređenju rezultata završnog testa kontrolne i eksperimentalne grupe.

Test	N	Srednja vrijednost	SD	<i>t</i>	<i>p</i>
Kontrolna grupa	80	3,6375	1,29	-1,299	0,196
Eksperimentalna grupa	81	3,37037	1,32		

Slika 3. Grafički prikaz rezultata kontrolne i eksperimentalne grupe poduke



Kao što vidimo iz tablice 4, *t*-test za nezavisne uzorke je pokazao da ne postoji statistički značajna razlika ($p > 0.05$) u znanju poslije poduke ove dvije grupe.

Napomena: Unatoč očekivanjima da će učenici podučavani pomoću GeoGebre imati bolje rezultate na završnom testu od svojih kolega koji su podučavani na tradicionalni način, rezultati to ne pokazuju. I kontrolna i eksperimentalna grupa je imala značajno bolje rezultate nakon poduke, ali između ove dvije grupe nije bilo statistički značajne razlike. Mogući razlog je gradivo jer *Grafik linearne funkcije* i utjecaj koeficijenta smjera i odsječka na y-osi na izgled grafika nije toliko komplikovan za predstavljanje i vizualnu demonstraciju putem table i krede, kao što je to npr. utjecaj parametara na izgled grafika trigonometrijskih funkcija. Također, mogući razlozi su i samo trajanje poduke kao i gradivo obuhvaćeno podukom: dok su u većini istraživanja poduke trajale nekoliko mjeseci i obuhvaćale gradivo dotad nepoznato učenicima, trajanje poduke u ovom istraživanju trajalo je manje od jednog školskog časa i obuhvaćalo je gradivo koje je učenicima bilo poznato iz osnovne škole. Bilo bi zanimljivo napraviti slično istraživanje sa

učenicima u osnovnoj školi, tj. učenicima kojima bi to bio prvi susret sa ovom nastavnom cjelinom.

b) Grafik eksponencijalne funkcije: Obuhvaćene su dvije grupe učenika drugog razreda jedne sarajevske srednje škole i formirane kontrolna i eksperimentalna grupa. Kontrolna grupa je podučavana na tradicionalni način, eksperimentalna pomoću GeoGebre.

Budući da je riječ o učenicima drugog razreda koji se prvi put susreću sa eksponencijalnim funkcijama testirali smo predznanje o stepenima. Učenici su dobili 10 zadataka u kojima su trebali izračunati vrijednosti stepena (između ostalog i kad se u eksponentu nađu nula, negativni i racionalni brojevi). Vrijeme izrade ovog testa bilo je 5 minuta.

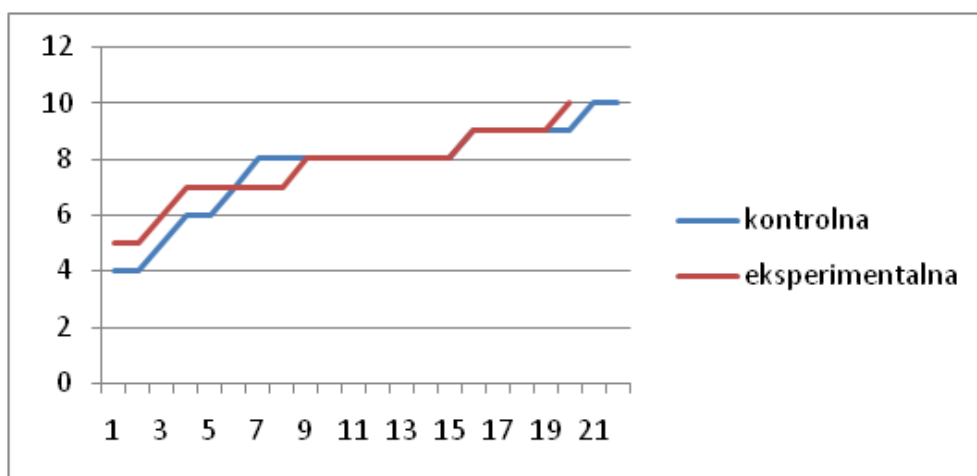
Tablica 5. Rezultati testa predznanja za kontrolnu i eksperimentalnu grupu

Grupa	N	Srednja vrijednost	SD	t	p
Kontrolna	22	7,68	1,70	0,06827235	0,95
Eksperimentalna	20	7,65	1,31		

Kontrolna grupa se sastojala od 22 učenika, eksperimentalna od 20 učenika.

Iz tablice 5 vidimo da ne postoji statistički značajna razlika u znanju o stepenima kontrolne i eksperimentalne grupe ($p = 0,94$).

Slika 4. Grafički prikaz rezultata kontrolne i eksperimentalne grupe na testu znanja o stepenima



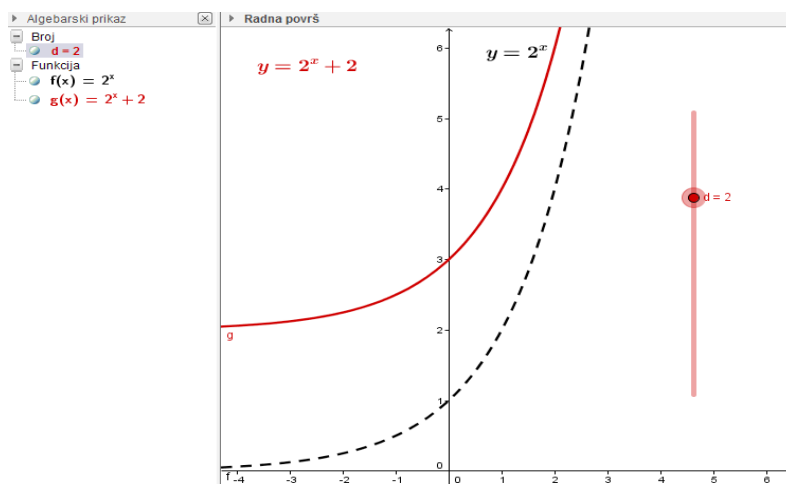
U prosjeku su učenici obje grupe znali uraditi 7 ili 8 zadataka (najčešće su griješili u dva zadatka koji su se odnosili na rad sa racionalnim eksponentima).

Nakon testa znanja o stepenima, slijedila je 30-minutno podučavanje o eksponencijalnim funkcijama. U obje grupe obrađena je osnovna eksponencijalna funkcija, $y = a^x$. Učenicima su objašnjene osobine eksponencijalne funkcije i utjecaj vrijednosti baze na izgled grafika. Zatim je objašnjen utjecaj parametara c i d na izgled grafika funkcija $y = a^{x-c}$ i $y = a^x + d$.

U kontrolnoj grupi za prikaz grafika funkcija korišten je tablični pristup, tj. za nekoliko vrijednosti promjenjive x izračunate su vrijednosti određene funkcije, a dobijene vrijednosti iskorištene za crtanje grafika. Na primjerima funkcija $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 2^{x-1}$, te $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 2^x + 1$, učenicima je objašnjen utjecaj parametara na transformaciju grafika funkcije.

U eksperimentalnoj grupi obrađeno je isto gradivo, ali su korištene PowerPoint prezentacija i GeoGebra. Osim tabličnog pristupa u crtanju grafika funkcije, učenicima je pomoću dinamičkih klizača objašnjen utjecaj parametara na transformaciju grafika funkcije.

Slika 5. Dio gradiva objašnjen pomoću GeoGebre



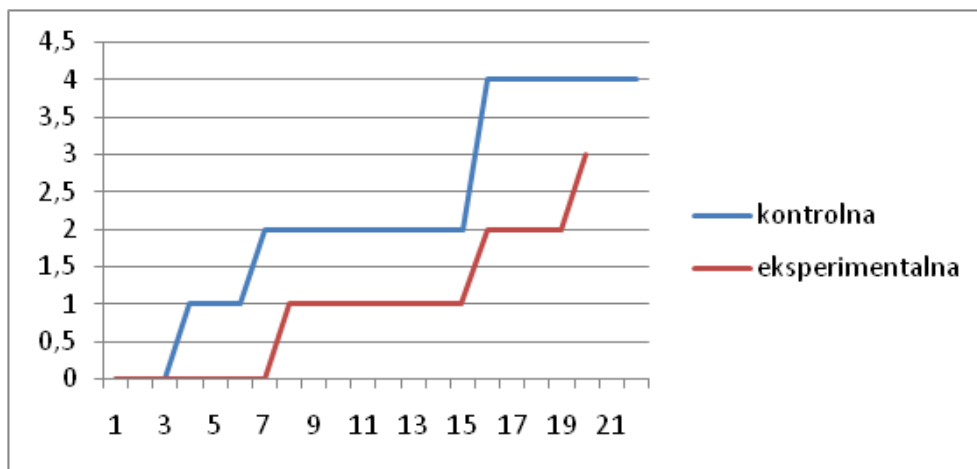
U završnom dijelu časa učenici su radili test u trajanju 10 minuta, koji se sastojao od 4 zadatka.

Ukupni rezultati završnog testa ukazuju na bolje rezultate kontrolne grupe, p -vrijednost u testu za nezavisne uzorke iznosi $p = 0,00$, pa postoji statistički značajna razlika između kontrolne i eksperimentalne grupe.

Tablica 6. Rezultati završnog testa za kontrolnu i eksperimentalnu grupu

Grupa	N	Srednja vrijednost	SD	<i>t</i>	<i>p</i>
Kontrolna	22	2,23	1,41	3,54	0,00
Eksperimentalna	20	0,95	0,89		

Slika 6. Grafički prikaz rezultata kontrolne i eksperimentalne grupe na završnom testu



Detaljnija analiza rezultata po zadacima pokazuje da za prvi i drugi zadatak nema razlike između ove dvije grupe, dok postoji u trećem i četvrtom pitanju.

U trećem zadatku **učenici su dobili dva grafika eksponencijalnih funkcija:**

jedan poznate funkcije $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, a za drugi su trebali prepoznati da je u pitanju grafik funkcije $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2$.

Tablica 7. Rezultati kontrolne i eksperimentalne grupe za treći zadatak

Grupa	N	Proporcija tačnih odgovora	<i>t</i>	<i>p</i>
Kontrolna	22	0,36	2,00	0,04
Eksperimentalna	20	0,10		

Dobijena *p*-vrijednost iznosi $p = 0,04 < 0,05$, pa postoji statistički značajna razlika u rezultatima kontrolne i eksperimentalne grupe (u korist kontrolne grupe).

Slične rezultate imamo i u četvrtom zadatku, u kojem su učenici trebali nacrtati grafik funkcije $y = 3^{x-1}$.

Kao što vidimo, značajno bolje rezultate kontrolna grupa ostvarila je u trećem i četvrtom zadatku, tj. upravo u zadacima gdje se tražila transformacija

grafika eksponencijalne funkcije.

Napomena: Učenici podučavani pomoću GeoGebre nisu imali bolje rezultate na završnom testu od svojih kolega koji su podučavani na tradicionalni način. Mogući razlog ovako dobivenih rezultata je što su završnom dijelu časa rađeni testovi znanja na tradicionalan način tako da učenici u eksperimentalnoj grupi nisu mogli primijeniti znanja stečena primjenom softvera GeoGebra. Dobiveni rezultati su u skladu sa istraživanjima u kojima su završni testovi rađeni na tradicionalan način.

ZAKLJUČAK

Iako sami rezultati ne pokazuju razliku u načinu poduke, rezultati anketa koje su popunili učenici prvih razreda koji su podučavani pomoću GeoGebre: „Grafik linearne funkcije i utjecaj koeficijenta smjera i odsječka na y -osi“ (njih 81) te nastavnici iz njihovih škola (ukupno 12 nastavnika) pokazuju da i učenici i nastavnici smatraju da bi bilo bolje koristiti edukativne softvere ovog tipa bar u pojedinim nastavnim jedinicama. Tako 54% učenika smatra da bi gradivo iz matematike lakše ili bolje savladalo uz pomoć računara i odgovarajućih softvera. Postotak učenika koji lekciju objašnjenu uz pomoć GeoGebre smatraju zanimljivijom (oko 68%) i razumljivijom (oko 52%) je također znan. Čak 75% nastavnika smatra da je potrebno koristiti edukativne softvere u nastavi.

Ukoliko pažljivo analiziramo rezultate rada kontrolne i eksperimentalne grupe drugih razreda koji obrađivali temu: *Grafik eksponencijalne funkcije*, možemo zapaziti da u trećem i četvrtom zadatku značajno bolje rezultate postigli su učenici kontrolne grupe. Ali potrebno je malo detaljnije sagledati rješenja kojima su učenici pribjegavali. Svi učenici kontrolne grupe koji su tačno uradili četvrti zadatak, tj. nacrtali grafik funkcije $y = 3^{x-1}$, koristili su tablice. Nijedan učenik kontrolne grupe nije zadatak riješio transformacijom grafika funkcije $y = 3^x$, iako im je tokom poduke pokazano kako to mogu uraditi. Međutim zapažamo da je nekoliko učenika eksperimentalne grupe tačno nacrtalo grafik eksponencijalne funkcije, a značajno je da je jedan učenik tačno nacrtao grafik koristeći transformaciju, a još troje ih je pokušalo. Vjerujemo da ovo govori u korist hipoteze (H2), te da su učenici imali više vremena da savladaju gradivo, tj. da se čitava nastavna cjelina radila pomoću GeoGebre, da bi rezultati bili još značajniji.

Zanimljiva je izjava 85% učenika da njihovi nastavnici nikad ili veoma rijetko koriste softvere u nastavi matematike, a 86% učenika nije ni samo pokušalo koristiti edukativne softvere.

Što se tiče obuke za korištenje edukativnih softvera u nastavi, nastavnici su podijeljeni po pitanju kvalitete poduke na fakultetima (šest nastavnika smatra da nije dobro podučeno na fakultetu, pet smatra da jesu). Poslije fakulteta većina nije prošla seminare ili radionice za korištenje edukativnih softvera u nastavi, već su samouki.

Iako je riječ o malom broju anketiranih nastavnika, rezultati ankete idu u prilog istraživanjima koja pokazuju da bez kvalitetnih edukativnih seminara i radionica, te podrške kolega koji i sami koriste softvere u nastavi, nastavnici ih neće koristiti čak i ako imaju potrebno znanje i opremu za to. Ovo može poslužiti kao signal i uputa nastavničkim fakultetima i odgovornim institucijama, ako doista žele moderno obrazovanje za učenike, prvo treba osigurati moderno obrazovanje za nastavnike.

LITERATURA

Bagheri-Toulabi, S., Amiripour, P., & Shahvarani, A. (2012): *Animation and Its Application in Trigonometry Instruction*, International Journal of Emerging trends in Engineering and Development, 2(2), pp. 57-66.

Böhm, J. (2009): *Linking Geometry, Algebra and Calculus with GeoGebra*. Dokument preuzet sa stranice http://www.qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/7948/Proceedings-636pages-Dresden2009_074-077.pdf

Carter, J., & Ferrucci, B. (2009): *An Analysis of Students' Research on Model Lessons that Integrate GeoGebra into School Mathematics*. Proceedings of the Fourteenth Asian Technology Conference in Mathematics, Beijing University, Peking, Kina, pp. 17-21.

Edwards, J. A., & Jones, K. (2006): *Linking geometry and algebra with GeoGebra*. Mathematics Teaching, 194, 28-30.

Fortiş, A., Bînzar, A., & Laiu, C. (2011), *GeoGebra: Another way of looking at Mathematics*. Annals. Computer Science Series, 9(2), pp. 215-224.

Haciomeroglu, E. S., Bu, L., Schoen, R. C., & Hohenwarter, M. (2009): *Learning to develop mathematics lessons with GeoGebra*. MSOR Connections, 9(2), pp. 24-26.

Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004): *Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra*. Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference. Pečuh, Mađarska.

Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2007): *Mathematics teacher development*

with ICT: towards an International GeoGebra Institute. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27 (3), pp. 49-54.

Hohenwarter, M., Preiner, J., & Yi, T. (2007): *Incorporating GeoGebra into teaching mathematics at the college level*. Proceedings of the International Conference for Technology in Collegiate Mathematics 2007.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008): *Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra*. 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico.

Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2009): *The strength of the community: How GeoGebra can inspire technology integration in mathematics teaching*. MSOR Connections, 9(2), 3-5.

Jaworski, B., & Matthews, J. (2012): *Engineering Students Understanding Mathematics (ESUM): an innovative teaching approach with integrated research*. Dokument preuzet sa stranice http://hestem.ac.uk/sites/default/files/esum_1.pdf

Saha, R. A., Ayub, A. F. M., & Tarmizi, R. A. (2010): *The effects of GeoGebra on mathematics achievement: enlightening coordinate geometry learning*. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 8, pp. 686-693.

Simeunović, D., & Russo, N. (2010): *Preduslov za rast: korištenje ICT u sekundarnom obrazovanju u BiH*, Infoteh Jahorina 9, pp. 1028-1031.

Tabak, E., Burgić, Dž., & Berberović, E. (2014): *GeoGebra: Dinamički matematički softver za nastavu i učenje*. Peti međunarodni naučno-stručni skup "Kulturni indentitet u digitalnom dobu". Filozofski Fakultet u Zenici, pp. 659-666.

Tapia, M. (2007): *Let's Do Math with Technology*. Proceedings of the Ninth International Conference Mathematics Education in a Global Community, University of North Carolina, Charlotte, SAD.

Zengin, Y., Furkan, H., & Kutluca, T. (2012): *The effect of dynamic mathematics software GeoGebra on student achievement in teaching of trigonometry*. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 31, pp. 183-187.