

Dževad Burgić
Edin Tabak

Kvadratura kruga

UVOD

U ovom radu bit će prikazan jedan matematički problem koji od davnina budi interesovanje i znatiželju. Naime, postavlja se pitanje da li je moguće konstruisati kvadrat iste površine kao i zadati krug. U periodu antičke Grčke¹, stari Grci su mogli da izračunaju površinu raznih geometrijskih ravnih likova uz pomoć površine kvadrata, pa se postavljalo pitanje da li se i površina kruga može izraziti na isti način.

Prikazat ćemo osnovne pojmove koji se spominju u problemu kvadrature kruga, broj i i konstrukcija kvadratnog korijena nekog broja. Data su osnovna saznanja o broju, njegova numerička vrijednost, kao i njegove aproksimacije. Prikazane su i formule za izračunavanje njegove približne vrijednosti. Također, pokazano je na koji način se konstruiše kvadratni korijen nekog realnog broja.

Nakon toga, prikazani su neki od drevnih pokušaja rješavanja ovog problema i doprinosi svakog pokušaja u aproksimaciji broja

U posljednjem dijelu ovog rada, uz pomoć tri leme, dokazana je teorema da je broj i transcendentan. U dokazima je korištena algebra polja i osnovna saznanja o algebarskim jednačinama, polinomima i korijenima tih polinoma. Dokazom da je broj i transcendentan, te da se transcendentan broj ne može konstruisati pokazano je da drevni problem kvadrature kruga nije moguće riješiti uz pomoć lenijara i trokuta.

Ključne riječi: konstrukcija, aproksimacija, iracionalni i transcedentni brojevi.

1) Period od oko 1000 godine p.n.e. do 323. godine p.n.e.

O kvadraturi kruga

Kvadratura kruga je matematički problem čija formulacija glasi: „Konstruisati kvadrat čija je površina jednaka površini datog kruga“. On predstavlja jedan od tri najpoznatija nerješiva problema antičke Grčke. Pored ovog problema postoje još problemi trisekcije ugla i udvostručenje kocke. Trisekcija ugla je problem u kojem je potrebno grafički podijeliti ugao na tri jednaka dijela, a udvostručenje kocke se odnosi na izračunavanje stranice kocke koja bi imala dva puta veću zapreminu od unaprijed zadane kocke.

U svakodnevnom životu kvadratura kruga je sinonim za nerješiv problem. Kvadraturu kruga su vijekovima rješavali matematičari, naučnici i drugi. Kvadratura se u geometriji koristi kao sinonim za izračunavanje površine, koja je za antičke Grke bila veoma važna. U helensko doba izračunavanje površine izvodilo se predstavljanjem površine geometrijske figure preko površine kvadrata.

Grci su znali kako da izračunaju površinu trougla, pravougaonika, svakog mnogougla, kao i geometrijskog tijela koje je sastavljeno od više ravnih geometrijskih likova. Također su znali da izračunaju i površinu nekih figura sa krivim linijama, ali nikada nisu uspjeli da samo uz pomoć šestara i lenijara konstruišu kvadrat čija je površina jednaka površini zadanog kruga. Konstrukcije pomoću šestara i lenijara podrazumijevaju konstrukcije samo pravih linija i krugova. Da bi se riješio ovaj problem potrebno je odrediti stranicu a kvadrata iz površine datog kruga. Sada ćemo da pokažemo koliko bi trebala da iznosi stranica našeg kvadrata.

„Kako je površina datog kruga, poluprečnika r , jednaka:

$$P = r^2\pi,$$

a površina kvadrata stranice a , jednaka:

$$P = a^2$$

Izjednačavanjem ovih površina dobijamo:

$$a^2 = r^2\pi.$$

Radi pojednostavljenja problema, ali bez gubitka općenitosti, uzimamo da je poluprečnik r i korjenujemo naš izraz, te iz toga slijedi da je:

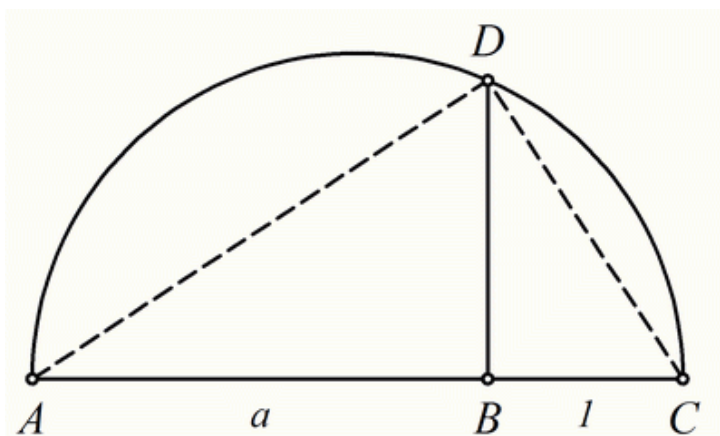
$$a = \sqrt{\pi}r.$$

Dolazimo do zaključka da stranica kvadrata čija je površina jednaka površini jediničnog kruga, iznosi $a = \sqrt{\pi}$. Stari Grci su

znali da geometrijski odrede kvadratni korijen nekog broja, pa se problem onda svodi na konstrukciju kvadratnog korijena broja π .“²

Konstrukcija kvadratnog korijena nekog broja

Da bi se konstruisao kvadratni korijen nekog broja a potrebno je nacrtati duž dužine a i produžiti je za jediničnu dužinu. Nakon toga opišemo polukrug na ovoj dužini.



Slika 1. Konstrukcija kvadratnog korijena broja a

Iz sličnosti trouglova slijedi da vrijedi proporcija:

$$\triangle ABD \text{ i } \triangle DBC$$

$$AB : BD = BD : BC$$

$$BD^2 = AB \cdot BC$$

$$BD = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{a}.$$

Vidimo da je visina, podignuta u tački B do presjeka sa našim polukrugom u tački D , ustvari dužina kvadratnog korijena dužine a .

Broj π i neke aproksimacije broja

„Broj π je matematička konstanta koja se široko primenjuje u matematici i fizici. Njena približna vrijednost je 3,14159, a definiše se kao odnos obima i prečnika kruga, ili kao odnos površine kruga i kvadrata nad njegovim poluprečnikom.“ Broj je također poznat i kao Arhimedova³ konstanta. Oznaka za broj potiče od grčke riječi *perimetros*, što znači mjeriti okolo. U matematiku ju je uveo matematičar Vilijem

2) Tamara S. *Kvadratura kruga*, Magistarski rad, Beograd 2011. str. 4

3) Arhimed - matematičar i najveći fizičar starog vijeka (287 g. p.n.e. - 212. g. p.n.e.).

Džouns 1707. godine kada je objavio svoju knjigu *Novi uvod u matematiku*, mada je i ranije korištena za označavanje obima kruga. Oznaka je postala standardna nakon što ju je usvojio Leonard Ojler⁴ 1734. godine.

Broj je iracionalan broj, što znači da se njegova vrijednost ne može izraziti preko razlomka. Zbog toga njegov decimalni zapis nema kraja i nije periodičan. Ovu osobinu broja je dokazao Johan Hajnrih Lambert 1761. godine. Broj je također i transcendentan broj, što znači da ga nije moguće izraziti korištenjem konačnog broja cijelih brojeva uz četiri osnovne računske operacije (sabiranje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) i korjenovanje. Ferdinand fon Lindeman je 1882. godine dokazao da ne postoji polinom sa racionalnim koeficijentima čiji bi korijen bio broj π .

Numerička vrijednost broja zaokružena na 62 decimalna mjesta iznosi:

$$\pi \approx 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105827494459.09_5$$

Beskonačni niz cifara u decimalnom zapisu broja vijekovima je predmet interesovanja matematičara i laika. Čak je i datum 14.03.⁶ proglašen kao Dan broja π .

Najstarija poznata aproksimacija broja π potiče od Vavilonaca, koji su u XX vijeku p.n.e vrijednost za broj π približno odredili sa $\frac{25}{8} \approx 3.125$. U istom periodu u Rindovom papirusu broj π je aproksimiran sa $(\frac{16}{9})^2 \approx 3.160493 \dots$. U III vijeku p.n.e Arhimed je odredio donju i gornju granicu za broj π : $\frac{223}{71} < \pi < \frac{220}{70}$ tj. $3.140845 \dots < \pi < 3.142857 \dots$.

Naučnici su se takmičili da izračunaju vrijednost broja sa što većom tačnošću, tj. sa što većim brojem tačnih decimalnih mjesta. Od 1949. godine svi rekordi su izračunati uz pomoć računara. Godine 2004. kanadski tim naučnika je izračunao broj π sa tačnošću od bilion decimalnih mjesta. Trenutni rekord u izračunavanju broja decimalnih mjesta drži amerikanac Aleksandar J. Yee, koji je 8. oktobra 2014. godine došao do broja od 13,3 triliona decimalnih mjesta.

Zbog transcendentnosti broja π ne postoje prikladni zatvoreni izrazi za taj broj, pa se u numeričkim izračunavanjima koriste približne aproksimacije. Obično se koriste aproksimacije 3,14 ili $\frac{22}{7}$. Inženjeri često koriste aproksimacije 3,1416 (5 značajnih cifara) ili 3,14159 (6 značajnih cifara) radi veće preciznosti u svojim izračunima.

4) Ojler - švicarski matematičar i fizičar koji je živio i radio u XVIII vijeku.

5) Tamara S. "Kvadratura kruga", Magistarski rad, Beograd 2011. str. 55

6) Američko zapisivanje datum 3.14, što predstavlja približnu vrijednost π

Neke od formula i aproksimacija za izračunavanje približne vrijednosti broja π su:

π Njutnova⁷ formula:

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!!} = 1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{5} \left(1 + \frac{3}{7} \left(1 + \frac{4}{9} (1 + \dots) \right) \right) \right).$$

π Aproksimacija Kočanskog⁸:

$$\pi \approx \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3,141533 \dots$$

π Vijetova aproksimacija⁹:

$$\pi \quad \frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \dots$$

π Lajbnicova aproksimacija:

$$\pi \quad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

π Bazelski problem:

$$\pi \quad \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

π Verižni razlomak (jedan od primjera)

$$\pi \quad \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{9 + \frac{5}{7 + \frac{16}{9 + \dots}}}}$$

Drevne kvadrature kruga

U ovom poglavlju upoznat ćemo se sa starim filozofima, matematičarima i ostalim ličnostima koji su dali svoj doprinos u rasvjetljavanju problema kvadrature kruga.

Rindov papirus je kolekcija poznatih matematičkih znanja iz perioda Starog Egipta. Smatra se da potiče iz 1750. godine p.n.e. Osim Rindovog,

7) Isak Njutn (1643 - 1727) je bio engleski fizičar, matematičar, astronom, alhemičar i filozof. Razvio je infitezimalni račun, otkrio zakon gravitacije i zakon kretanja

8) Kočanski poljski jezuitski svećenik, 1865. godine.

9) Borwein J. M. *The life of Pi: From Archimedes to Eniac and Beyond*, Berggren Festschrift, 2010. str. 6

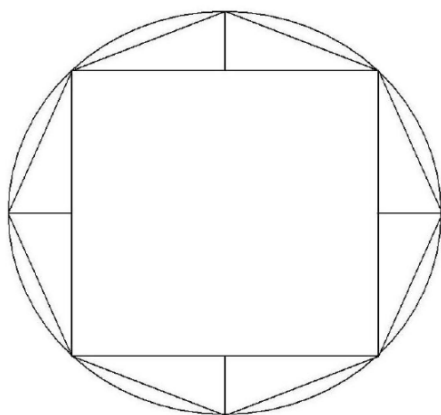
postoji i Moskovski papirus,¹⁰ koji je i stariji oko 100 godina od Rindovog, ali Rindov sadrži puno više matematičkog materijala.

„U Rindovom papirusu se nalaze i sljedeća saznanja:

1. Broj je aproksimiran sa $\frac{256}{81} \approx 3,1605 \dots$,
2. Površina kruga se izračunava po formuli: $P = \frac{64}{81}d^2$ (d je prečnik kruga),
3. Ako se prečnik kruga umanjuje, dobija se stranica kvadrata približno iste površine kao zadati krug.[10 vol II, str. 302]¹¹

Anaksagora (500 – 428. godine stare ere) je bio prvi Grk, za kojeg se zna da se bavio problematikom kvadrature kruga. Anaksagora je bio prvi koji je prikazao da problem kvadrature kruga predstavlja matematički problem.

„Antifon iz Atine, koji je živio u V vijeku p.n.e. napisao je četiri teksta, od kojih su sačuvana samo dva: *Istina* i *O složenosti*. On je razmatrao problem kvadrature kruga i u tom kontekstu ga spominje Aristofan (448 - 335. godine stare ere): „Tada uzmem lenijar i šestar izmjerim, i krug se u kvadrat pretvorio.“¹² O njegovom pristupu navedenoj problematici tumačenja su dali Simplikije¹³ i Temistije, u komentarima Aristotelove *Fizike* [Physics I, 185 a 18].“¹⁴



Slika 2. Antifonov metod

„Nakon upisivanja kvadrata u zadati krug, nad njegovim stranicama se

10) Prema ovom obrascu, Egipćani suznali za površinu pravougaonika, trougla, za zapreminu površine i zarubljene četverostrane piramide.

11) Tamara S., *Kvadratura kruga*, Magistarski rad, Beograd 2011. str 7.

12) Ptice (Preveo mišo N. Đurić, Beograd: Nolit, 1963.) - Meton geometar u sceni V.

13) Simplikije jedan od posljednjih neoplatoničara iz VI vijeka nove ere.

14) Tamara S., *Kvadratura kruga*, Magistarski rad, Beograd 2011. str 9.

konstruišu jednakokraki trouglovi. Tjeme svakog trougla nalazi se naspram stranice kvadrata i leži na kružnici. Tjemena kvadrata i navedena tjemeni trougla, njih osam ukupno, su tjemeni pravilnog osmougla upisanog u krug. Isti postupak se ponavlja, pa se dobija pravilni šesnaestougao upisan u krug.“¹⁵

Svaki naredni put broj ivica se udvostručuje, a obim i površina mnogougla sve su bliže obimu i površini kruga. Nakon određenog broja ponavljanja konačno bi se mnogougao i krug podudarili. Kako Antifon zna da konstruiše kvadrat iste površine kao i zadati mnogougao, iz jednakosti površina kruga i mnogougla slijedila bi i jednakost površine kruga i kvadrata.

Brisonov metod - Brison (kasni V vijek p.n.e) je bio drevni grčki matematičar koji je dao doprinos rješavanju problema kvadrature kruga i izračunavanja broja π . „Brison je također, kao i Antifon, došao na ideju da se u krug upiše poligon i zatim udvostruči broj stranica poligona i ponovi proces“,¹⁶ dobijajući kao rezultat donju granicu aproksimacije površine kruga. Brison je kasnije ponovio istu proceduru sa poligonima opisanim oko kružnice, dobijajući gornju granicu aproksimacije površine kruga. Sa ovim proračunima Brison je mogao da aproksimira i broj π čak da postavi i donje i gornje granice vrijednosti ovog broja. Zbog kompleksnosti aproksimacije uspio je da aproksimira broj π na samo 5 decimala.

„Hipokrat (470 – 410. godine stare ere) je grčki matematičar i tvorac mnogih geometrijskih otkrića, a posebno se isticao na polju konstrukcija. Hipokrat je u Atini boravio između 450. i 430. godine p.n.e. i u tom periodu se zainteresovao za geometriju i pokušao da riješi problem kvadrature kruga (5, vol. I, str. 183). Pri tim pokušajima riješio je problem kvadrature lunule i time pokazao da „krivolinijski lik“ može biti jednak „pravolinijskom“. Hipokrat je poznat i po prvom pokušaju da se geometrijska znanja sistematski izlože u deduktivnoj formi. Prema Eudemu, Hipokrat je sastavio prve *Elemente* i time započeo duгу istoriju zasnivanja geometrije kao deduktivne nauke. Njegove stavove Euklid je kasnije uključio u I, III i VI knjigu svojih *Elementa*.“¹⁷

O rješivosti problema kvadrature kruga

Sada ćemo navesti osnovne definicije i teoreme potrebne u nastavku ovog rada.

Jednačina oblika:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

pri čemu su a_i proizvoljni realni brojevi i x nepoznati realan broj, naziva se

15) Tamara S., *Kvadratura kruga*, Magistarski rad, Beograd 2011. str 10.

16) Heath T.L. *A History of Greek Matematich*, vol. I. Dover Publications, New York, 1981., str. 224.

17) Tamara S., *"Kvadratura kruga"*, Magistarski rad, Beograd 2011. str 11.

algebarska jednačina n - tog stepena.

Neka je $F = (F, +, \cdot, 0, 1)$ polje i neka $a_0, \dots, a_n \in F$ Algebarski izraz oblika:

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

je polinom nad poljem F sa koeficijentima $a_0, a_1, \dots, a_n$

Ako je $a_n \neq 0$, možemo reći da je stepen našeg polinoma n . Skup svih polinoma nad poljem F obilježava se sa $F[x]$. Element $a \in F$ je korijen polinoma (rješenje algebarske jednačine) $p \in F[x]$ ako vrijedi da je $p(a) = 0$. Polinom $p \in F[x]$ možemo svesti na F ako je p proizvod polinoma nad F stepena manjeg od stepena polinoma p .

Neka su F i K i polja takva da je $F \subset K$. F je podpolje polja K , a K je raširenje polja F . Svako polje L za koje vrijedi $F \subset L \subset K$ naziva se međupolje. Također vrijedi da je K vektorski prostor nad F . Dimenzija ovog prostora označava se sa $[K:F]$ Ako je ova dimenzija konačna onda je K konačno raširenje polja F . Element $a \in K$ je algebarski nad F ako je a korijen nekog polinoma nad poljem F . Element $A \in K$ je transcendentan nad F ako i samo ako nije algebarski nad poljem F .

Transcendentnost broja π

Jedna od važnih stvari u razmatranju rješivosti problema kvadrature kruga je dokaz da je broj π transcendentan. Zasluge za ovaj dokaz idu njemačkim matematičarima Ferdinandu fon Lindemanu (1852. – 1939.) i Karlu Vajerštrasu (1815. - 1897.). Transcendentnost broja π slijedi kao direktna posljedica njihove teoreme.

Teorema 1.¹⁸

Ako su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ različiti algebarski brojevi, tada su: $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \dots, e^{\alpha_n}$ linearno nezavisni nad skupom algebarskih brojeva.

Da bi se teorema dokazala potrebno je pokazati da ako su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ različiti algebarski brojevi takvi da važi $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, onda vrijedi: $a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + \dots + a_n e^{\alpha_n} \neq 0$.

Lema 1. Ako su K i c cijeli brojevi različiti od nule i $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ korijeni polinoma sa cjelobrojnim eksponentima $T(x) = vx^m + \dots + u$, pri čemu je $K + c(e^{\beta_1}, e^{\beta_2}, \dots, e^{\beta_m}) \neq 0$.

Dokaz. Ako uočimo funkciju: $f(x) = \frac{v^{(m-1)p} T^p x^{p-1}}{(p-1)!}$

pri čemu je p prost broj, i integral:

18) Baker A., *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1975. str 6-8. Lindeman's Theorem

$$I(s) = \int_0^s e^{(s-x)} f(x) dx.$$

Rješavajući integral $I(s)$ dobijemo da je:

$$I(s) = e^s \sum_{j=0}^n f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^n f^{(j)}(s),$$

pri čemu je $n = mp + p - 1$ stepen funkcije f , i $f^{(j)}$ je j -ti izvod funkcije f .

Sada posmatrajmo sumu:

$$\begin{aligned} c \sum_{i=1}^m I(\beta_i) &= c \sum_{i=1}^m e^{\beta_i} \sum_{j=0}^n f^{(j)}(0) - c \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n f^{(j)}(\beta_i) = \\ &= \left(K + c \sum_{i=1}^m e^{\beta_i} \right) \sum_{j=0}^n f^{(j)}(0) - K \sum_{j=0}^n f^{(j)}(0) - c \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n f^{(j)}(\beta_i). \end{aligned}$$

Izraz na lijevoj strani teži nuli, kada $p \rightarrow \infty$, jer je:

$$|I(s)| \leq |s| \cdot \max_{x \in [0, s]} [|T(x)|] \cdot \frac{\left(\max_{x \in [0, s]} [|xT(x)|] \right)^{(p-1)}}{(p-1)!}.$$

Zbog ove činjenice izraz na desnoj strani je jednak:

$$c_1 \frac{c_2^k}{k!},$$

pri čemu su c_1, c_2 konstante i $k = p - 1$ koji teži nuli, kada $k \rightarrow \infty$

Iz definicije funkcije f slijedi da je za svako $j < p - 1, f^{(j)} = 0$, a za svako $j \geq p$ je $f^{(j)} = 0 \pmod{p}$. Također vrijedi:

$$f^{(p-1)} = v^{(m-1)p} T^p(0) = v^{(m-1)p} u^p,$$

tako da je:

$$\sum_{j=0}^n f^{(j)}(0) = v^{(m-1)p} u^p \pmod{p}.$$

Iz definicije funkcije f i brojeva $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ slijedi da je:

$$f(x) = (v^m(x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_m))^p \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Prema tome za svako $1 \leq i \leq n$ i za svako $j < p$ je $f^{(j)}(\beta_i) = 0$, dok za svako,

$$j \geq p \frac{1}{pv^{mp}} \sum_{i=1}^m f^{(j)}(\beta_i)$$

je vrijednost simetričnog polinoma sa cjelobrojnim koeficijentima, stepena manjeg od mp , u tačkama β_i .

Također je za svako:

$$j, \frac{1}{pv^{mp}} \sum_{i=1}^m f^{(j)}(\beta_i)$$

vrijednost polinoma sa cjelobrojnim koeficijentima, najvišeg stepena mp u cijelim brojevima dijeljenim sa v zato je cijeli broj dijeljen sa v^{mp} . Zaključuje se da je za svako j , $\sum_{i=1}^m f^{(j)}(\beta_i)$ cijeli broj jednak nuli po modulu p i vrijedi $c, \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n f^{(j)}(\beta_i) = 0 \pmod{p}$. Tako da je:

$$K \sum_{j=0}^n f^{(j)}(0) + c \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n f^{(j)}(\beta_i) = Kv^{(m-1)p} u^p \pmod{p}.$$

Za $p > K, u, v$, lijeva i desna strana prethodne jednakosti jednake su po cijelom broju različitom od nule po modulu p . Iz prethodnog slijedi:

$$K + c(e^{\beta_1}, e^{\beta_2}, \dots, e^{\beta_m}) \neq 0,$$

što je trebalo i dokazati. ■

Lema 2.

Ako su K i $c(1), c(2), \dots, c(n)$ cijeli brojevi različiti od nule, i ako su za svako $k = \overline{1, n}$, $\{\beta(k)_i\} (i = 1 \dots m(k))$ korijeni polinoma sa cjelobrojnim koeficijentima $T_k(x) = v(k)^{m(k)} + \dots + u(k)$, pri čemu su $v(k), u(k) \neq 0$ onda važi:

$$\begin{aligned}
 & K + c(1)(e^{\beta(1)_1} + e^{\beta(1)_2} + \dots e^{\beta(1)_{m(1)}}) + \\
 & + c(2)(e^{\beta(2)_1} + e^{\beta(2)_2} + \dots e^{\beta(2)_{m(2)}}) + \dots + \\
 & + c(n)(e^{\beta(n)_1} + e^{\beta(n)_2} + \dots e^{\beta(n)_{m(n)}}) \neq 0.
 \end{aligned}$$

Dokaz. Treba znati da korijeni svakog polinoma $T_k(\mathbf{x})$ ostaju nepromijenjeni nakon njihovog množenja brojem različitim od nule. Polinomi $T_k(\mathbf{x})$ određuju se tako da je proizvod $\mathbf{u}(k)\mathbf{v}(k)^{m(k)-1}$ nezavisan od k , inače se svaki polinom $T_k(\mathbf{x})$ množi odgovarajućim cjelobrojnim faktorom.

Jedan takav cjelobrojni faktor je naprimjer:

$$\frac{1}{u(k)v(k)^{n(k)-1}} \prod_{j=1}^n u(j)v(j)^{m(j)-1}.$$

Za svako $k = \overline{1, n}$ važi da je $\mathbf{u}(k)\mathbf{v}(k)^{m(k)-1}$ pri čemu je U cijeli broj. Ako sada iskoristimo Lemu 1 imamo:

$$\begin{aligned}
 c(k) \sum_{i=1}^{m(k)} I_k(\beta(k)_i) &= \left(K_k + c(k) \sum_{i=1}^{m(k)} e^{\beta(k)_i} \right) \sum_{j=0}^{m(k)p+p-1} f_k^{(j)}(0) - \\
 -K_k \sum_{j=0}^{m(k)p+p-1} f_k^{(j)}(0) &- c(k) \sum_{i=1}^{m(k)} \sum_{j=0}^{m(k)p+p-1} f_k^{(j)}(\beta(k)_i) = \\
 &= \left(\left(K_k + c(k) \sum_{i=1}^{m(k)} e^{\beta(k)_i} \right) U^p - K_k U^p \right) (mod p).
 \end{aligned}$$

Za svaki cijeli broj K_k postoje brojevi $K_k - s$, takvi da njihova suma K . Sabiranjem n jednačina za svako $k = \overline{1, n}$ lijeva strana jednačine teži nuli kada, $p \rightarrow \infty$, dok desna strana postaje jednaka izrazu:

$$\left(\left(K + \sum_{k=1}^n c(k) \sum_{i=1}^{m(k)} e^{\beta(k)_i} \right) U^p - K U^p \right),$$

tj. ako posmatramo ovaj izraz po modulu p vrijedi:

$$\left(\left(K + \sum_{k=1}^n c(k) \sum_{i=1}^{m(k)} e^{\beta(k)_i} \right) U^p - KU^p \right) = 0 \pmod{p}.$$

Slobodnim izborom broja p , $p > K$, U i ako je $K \neq 0$ važi:

$$K + \sum_{k=1}^n c(k) \sum_{i=1}^{m(k)} e^{\beta(k)_i} \neq 0,$$

što je trebalo i dokazati.

Lema 3. *Ako su $b(0), b(1), \dots, b(n)$ cijeli brojevi različiti od nule i $\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(n)$ različiti algebarski brojevi, onda je:*

$$b(0)e^{\gamma(0)} + b(1)e^{\gamma(1)} + \dots + b(n)e^{\gamma(n)} \neq 0.$$

Dokaz. Ako pretpostavimo da pod datim uslovima teoreme važi suprotno:

$$b(0)e^{\gamma(0)} + b(1)e^{\gamma(1)} + \dots + b(n)e^{\gamma(n)} = 0,$$

pokazat ćemo da je ta kontrapretpostavka netačna. Prvo prethodnu jednačinu podijelimo sa. Dobit ćemo izraz: $K + b(1)e^{\alpha(1)} + \dots + b(n)e^{\alpha(n)} = 0$, gdje je $K = b(0)$ i $\alpha(i) = \gamma(i) - \gamma(0)$, za svako $i = \overline{1, n}$. Kako su $\gamma(i)$ različiti algebarski brojevi, to su onda i brojevi $\alpha(i)$ za $i = \overline{1, n}$ različiti od nule. Za svako $i = \overline{1, n}$ $\alpha(i)$ je i algebarski pa je korijen polinoma sa cjelobrojnim koeficijentima: $T_k(x) = v(k)x^{m(k)} + \dots + u(k)$, za neke cijele brojeve $v(k)$ i $u(k)$ različite od nule i za neki pozitivan cijeli broj $m(k)$. Neka su $a(k)_1, a(k)_2, \dots, a(k)_{m(k)}$ korijeni polinoma $T_k(x)$ i $a(k)_1 = a(k)$. Neka je σ funkcija koja bira po jedan element iz svakog od nizova: $(1 \dots m(1)), (1 \dots m(2)), \dots, (1 \dots m(k))$ tako da je $\sigma(k)$ cijeli broj između 1 i $m(k)$. Iz polazne pretpostavke slijedi da je:

$$\prod_{\{\sigma\}} (K + b(1)e^{\alpha(1)\sigma(1)} + \dots + b(n)e^{\alpha(n)\sigma(n)}) = 0.$$

Ova jednakost ekvivalentna je sljedećoj jednakosti:

$K' + c(1)(e^{\beta(1)_1} + e^{\beta(1)_2} + \dots + e^{\beta(1)_{m(1)}}) + c(2)(e^{\beta(2)_1} + e^{\beta(2)_2} + \dots + e^{\beta(2)_{m(2)}}) + \dots + c(n)(e^{\beta(n)_1} + e^{\beta(n)_2} + \dots + e^{\beta(n)_{m(n)}}) = 0$, gdje su $K', n, c(1), \dots, c(n), m(1), \dots, m(n)$ cijeli brojevi različiti od nule, a β -koeficijenti međusobno različiti i različiti od nule. Za svako $i = \overline{1, n}$ i svako $j = \overline{1, m(i)}$, $\beta(i)_j$ je suma izraza oblika $a(k)_t$, za $k = \overline{1, n}$ i $t = \overline{1, m(k)}$. Kako je Π proizvod za sve moguće izbore funkcije α , slijedi da je za svako i i za svako k , svaki simetričan polinom sa cjelobrojnim koeficijentima u tačkama: $\beta(k)_1, \dots, \beta(k)_{m(k)}$, također

simetričan, odakle slijedi da je i svaki polinom sa cjelobrojnim koeficijentima $a(k)_1, \dots, a(k)_{\mu(k)}$ također simetričan. Kako je navedeni skup korijena polinoma sa cjelobrojnim koeficijentima, navedeni simetrični polinomi su racionalni brojevi, što slijedi iz *Leme 1*. Zato su $\beta(k)_1, \dots, \beta(k)_{m(k)}$ korijeni polinoma sa racionalnim koeficijentima: $(x - \beta(i)_1)(x - \beta(i)_2) \dots (x - \beta(i)_{m(i)})$.

Množenjem ovog polinoma odgovarajućim cijelim brojem, dobija se polinom sa cjelobrojnim koeficijentima, čiji su korijeni $\beta(k)_1, \dots, \beta(k)_{m(i)}$. Prema *Lemi 2*, prethodna suma ne može biti jednaka nuli, pa je kotrapretpostavka nemoguća, te slijedi da vrijedi tvrdnja *Leme 3*. ■

Sada kad smo dokazali ove tri leme i izveli njihove dokaze, možemo dokazati sljedeću teoremu.

Teorema 1. *Ako su $a_1, a_2, \dots, a_n$ različiti algebarski brojevi, tada su: $e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_n}$ linearno nezavisni nad skupom algebarskih brojeva.*

Dokaz. Dokazat ćemo to tako što ćemo pokazati da ako su brojevi $a_1, a_2, \dots, a_n$ algebarski brojevi različiti od nule, onda je:

$$a_1 e^{a_1} + a_2 e^{a_2} + \dots + a_n e^{a_n} \neq 0.$$

Da bi dokazali tvrdnju teoreme pretpostavit ćemo suprotno:

$$a_1 e^{a_1} + a_2 e^{a_2} + \dots + a_n e^{a_n} = 0.$$

Dokaz je sličan dokazu *Leme 3*. Za svako $i = \overline{1, n}$, a_i je algebarski broj, pa je on korijen nekog polinoma sa cjelobrojnim koeficijentima stepena d_i , čiji su korijeni $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{d_i}}$. Posebno je $a_{i_1} = a_i$. Neka je α funkcija koja bira po jedan element iz svakog od nizova $(1, \dots, d_1), \dots, (1, \dots, d_n)$, takva da je za svako $i = \overline{1, n}$, $\sigma_i \in (1, \dots, d_i)$. Prema polaznoj pretpostavci je:

$$\prod_{\{\sigma\}} (a_{1_{\sigma(1)}} e^{a_1} + \dots + a_{n_{\sigma(n)}} e^{a_n}) = 0.$$

za sve moguće izbore funkcije. Ako riješimo ovaj proizvod i rastavimo ga dobit ćemo sumu oblika: $b_1 e^{\beta_1} + b_2 e^{\beta_2} + \dots + b_N e^{\beta_N} = 0$.

Za neki cijeli broj N različit od nule, i za neke algebarske brojeve $\beta_1, \dots, \beta_N$ koji su algebarski kao suma algebarskih koeficijenata $a, b_1, \dots, b_N$ su polinomi u tačkama a_{ij} za $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, d_i}$ sa cjelobrojnim koeficijentima. Kako je Π proizvod za sve moguće izbore funkcije α , svaki od polinoma $b_1, \dots, b_N$ je simetričan polinom sa cjelobrojnim koeficijentima u elementarno simetričnim polinomima skupa $a_{i_1}, \dots, a_{i_{d_i}}$ za svako i . $b_1, \dots, b_N$ su racionalni brojevi, kao u dokazu *Leme 3*, i množenjem jednačine sa odgovarajućim cjelobrojnim faktorom,

dobijamo identičnu jednačinu osim što su sada $b_1, \dots, b_N$ cijeli brojevi. Prema Lemi 3 to nije moguće, iz čega slijedi da naša kontrapretpostavka nije tačna. Ako kontrapretpostavka nije tačna, slijedi da je tačna naša prvobitna tvrdnja.

Lema 1 je dovoljna za dokaz da je broj π iracionalan broj, inače bi vrijedila jednakost: $\pi = \frac{k}{n}$, (k, n su cijeli brojevi) i onda bi brojevi $i\pi$ i $-i\pi$ bili korijeni jednačine $x^2 + \frac{k^2}{n^2} = 0$ i važi bi $2 + e^{i\pi} + e^{-i\pi} \neq 0$, što je nemoguće.

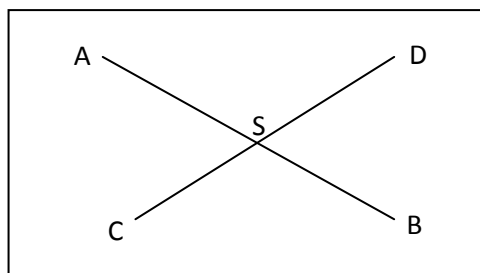
Lema 3 je dovoljna da se dokaže da je broj π transcendentan broj, što je nama i bilo potrebno, inače bi važi bi $1 + e^{i\pi} \neq 0$, što je nemoguće.

Broj π nije moguće konstruisati¹⁹

Kao što smo već vidjeli, da bi bilo moguće riješiti problem kvadrature kruga potrebno je moći predstaviti kvadratni korijen broja π uz pomoć lenijara i šestara. Sada ćemo dati pojašnjenje zašto nije moguće konstruisati broj π

Tačke u Euklidskoj ravni koje se mogu dobiti konstrukcijama primjenom lenijara i šestara su konstruktibilne, odnosno moguće ih je konstruisati. Koristeći metode analitičke geometrije tačke se označe kao uređeni parovi realnih brojeva. Broj π je moguće konstruisati ako je par π moguće konstruisati. Također, su tačke koje je moguće konstruisati ako i samo ako je par π moguće konstruisati. Za konstruktibilne tačke važe sljedeće osobine, sve dozvoljene konstrukcije su svodljive na sljedeće koje se navode. Ako su različite tačke tada važi:

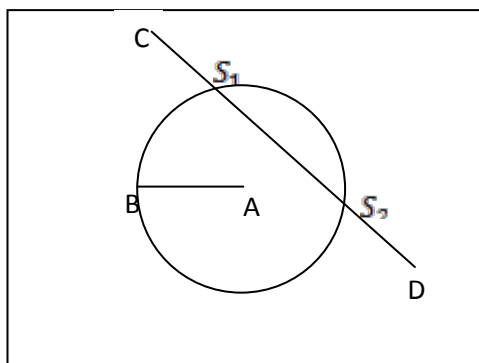
1. Ako se duži AB i CD sijeku onda je njihova tačka konstruktibilna,



Slika 6. Presjek dvije duži i

2. Ako je krug sa centrom u tački i poluprečnikom koji siječe duž tada su presječne tačke kruga i duži konstruktibilne.

¹⁹⁾Tamara S. *Kvadratura kruga*, Magistarski rad, Beograd 2011. str. 69.



Slika 7. Presjek kruga i duži

Ako se pretpostavi da koordinate tačaka A , B , C i D leže u nekom podpolju F realnih brojeva, koristeći se metodama analitičke geometrije dobijamo:

- Ako važi navedeni slučaj 1, koordinate nove tačke leže u polju F
- Ako važi navedeni slučaj 2, koordinate nove tačke leže F ili $F F(\sqrt{a})$, gdje je $a \in F$ neki pozitivan broj.

Zaključak je da za svaki broj koji možemo konstruisati postoji $n \in \mathbf{N}$ takvo da je: $Q = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$ i $a \in F_n$, gdje za $F_i = F_{i-1}(\sqrt{a_i})$, a_i , a_i je neki pozitivan broj iz F_{i-1} . Sada slijedi da je $|F_n:Q| = 2^m$, za neki $m \in \mathbf{N}$, pa je i $|F(a):Q|$ stepen broja 2. Iz ovoga neposredno slijedi tačnost sljedeće tvrdnje: *Svaki konstruktibilan broj je algebarski nad poljem Q i njegov stepen nad Q je jednak stepenu broja 2.*

Budući da broj nije algebarski nad poljem Q , on je transcendentan, nije ga moguće konstruisati. Prema tome, slijedi da problem kvadrature kruga nije moguće riješiti pomoću lenijara i šestara, što je trebalo i pokazati.

SUMMARY

The quadrature of the circle is a mathematical problem whose wording is: "To construct a square area is equal to the surface of a given circle". He is one of tree most famous problems of ancient Greece. In addition to this problem, there are still problems of trisection of the angle and the doubling cube. Tri-section of an angle is the problem in the wich the grafic the necessary graphic share angle into tree equal parts, and doubling the cube refers to calculate the sides of cube, wich would have two times more volume than the default cube.

In the daily life of the squaring of the circle is a synonym for an usolved problem. For exampla, the expresion "you god rid of the squaring of the circle" is often used to disprove one's belief that is fas foun a simple solution complicated problems.

Keywords: structure, approximation, irrational and transcendent numbers.

ZAKLJUČAK

Kao što vidimo problem koji je nastao još u periodu antičke Grčke riješen je tek u XIX stoljeću. Mnogi matematičari, filozofi i amateri zaljubljenici u matematiku su pokušali da riješe ovaj problem, ali bezuspješno. Ali svi su oni doprinijeli što tačnijoj aproksimaciji broja π i formulama za što preciznije izračunavanje broja.

Kao što smo vidjeli u radu, upotrebom računara sada je moguće odrediti tačnost broja π na trilion decimalnih mjesta. U staroj Grčkoj aproksimacija broja π je išla do pet ili šest decimalnih mjesta.

Glavna prekretnica u ovom problemu i dokazivanju njegove nerješivosti je dokazivanje da je transcendentan broj π i da ga nije moguće konstruisati, što je i prikazano u ovom radu.

LITERATURA

1. Baker A. , *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1975.
2. Borwein J. M. , *The Life of Pi: From Archimedes to Eniac and Beyond*, Berggren Festschrift, 2010.
3. Dorrie H., *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications, New York, 1965.
4. Eco U. , *Kako se piše diplomski rad*, Narodna knjiga/Alfa, Beograd, 2000.
5. Euclid, Heiberg J. L., Fitzpatrick R., *Euclid's Elements of Geometry*, 2008.
6. Heath T. L. , *A History of Greek Mathematics*, vol. I-II, Dover Publications, New York, 1981.
7. Hobson E. W., *Squaring the Circle and Other Monographs*, Cambridge University Press.
8. Smith D. E. , *History of Mathematics*, vol. I-II, Dover Publications, New York, 1958.
9. Tamara S. , *Kvadratura kruga*, Magistarski rad, Beograd 2011.