

Dr. sc. Huskanović Almir

Dr. sc. Naida Bikić

## VIŠE NAČINA RJEŠAVANJA NEODREĐENIH INTEGRALA METODOM PARCIJALNE INTEGRACIJE

### *Sažetak*

*U ovom radu prezentiramo rješavanje neodređenog integrala na više načina, korištenjem standardne formule parcijalne integracije u neodređenom integralu, kao i formule parcijalne integracije dobijene pomoću formule za diferencijal količnika dvije funkcije.*

**Ključne riječi:** *neodređeni integral, parcijalna integracija, rješavanje zadataka na više načina*

Kod rješavanja zadataka u nastavi matematike treba se usmjeriti veća važnost rješavanju jednog zadatka na više načina, nego rješavanju niza stereotipnih zadataka na jedan isti način. Različite varijante rješavanja jednog istog zadatka omogućuju učeniku da aktivira matematičko mišljenje i iskoristi sve bogatstvo svojih matematičkih znanja. Matematičko iskustvo učenika bilo bi nepotpuno ako mu nikada ne bismo dali priliku da pokuša riješiti neki zadatak na različite načine (Arslanagić, Milošević, pp.42).

U oblasti matematičke analize, tačnije integralnog računa, poznato je da se neodređeni integrali, koje možemo rješavati metodom parcijalne integracije, vrlo često mogu riješiti i na neki drugi način. Akcenat u ovom radu je da se vidi i sama metoda parcijalne integracije koja se može realizovati na više načina, što ćemo vidjeti na primjeru dva zadatka.

### **Zadatak 1. Riješiti integral**

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

**Rješenje 1.** Prvi način izrade zadatka odnosi se na uobičajeno rješavanje metodom parcijalne integracije.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

gdje su  $u = f(x)$  i  $v = g(x)$  i diferencijabilne funkcije od  $x$ .

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} dx - \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \arctg x - A$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} A &= \int x \frac{xdx}{(x^2 + 1)^2} = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \frac{xdx}{(x^2 + 1)^2} \\ v = \int \frac{xdx}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2(x^2 + 1)} \end{array} \right| \\ &= -\frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctg x + C. \end{aligned}$$

Oдавдје slijedi:

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \arctg x + \frac{x}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \arctg x + C$$

odnosno

$$I = \frac{1}{2} \left( \arctg x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + C.$$

**Rješenje 2.** U tabličnom integralu  $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctg x + C$  odaberimo da je  $u = \frac{1}{x^2 + 1}$  i  $dv = dx$ . Tada je  $I_1 = \int u dv = uv - \int v du$  i  $v = x$ , pa je

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x}{x^2 + 1} + \int \frac{2x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \left[ \int \frac{dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \right] \end{aligned}$$

pa je prema tome

$$I_1 = \frac{x}{x^2 + 1} + 2(I_1 - I) \Rightarrow 2I = I_1 + \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \left( \arctg x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + C$$

**Rješenje 3.** Umjesto standardne formule (1) za parcijalnu integraciju u neodređenom integralu, integriranjem poznate formule „diferencijal količnika“

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}, v \neq 0$$

dobija se

$$\frac{u}{v} = \int \frac{vdu}{v^2} - \int \frac{u dv}{v^2} = \int \frac{du}{v} - \int \frac{u dv}{v^2}$$

dakle

$$\frac{u}{v} = \int \frac{du}{v} - \int \frac{u dv}{v^2} \quad (3)$$

Formula (3) može se smatrati formulom parcijalne integracije u neodređenom integralu.

Ako izaberemo da je  $u = \frac{1}{2x}$  i  $v = x^2 + 1$ , tada je,  $u dv = \frac{1}{2x} \cdot 2x dx = dx$ , i

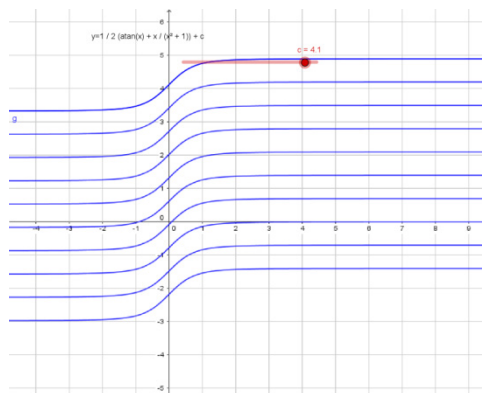
pa je očigledno 
$$\int \frac{u dv}{v^2} = \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Koristeći formulu (3) dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-\frac{1}{2x^2} dx}{x^2 + 1} - \frac{\frac{1}{2x}}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2x(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{x^2(x^2 + 1)} dx \\ &= -\frac{1}{2x(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \left( \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} \right) \\ &= -\frac{1}{2x(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{x} - \arctg x \right) + C \end{aligned}$$

gdje se nakon sređivanja izraza dobije ponovo

$$I = \frac{1}{2} \left( \arctg x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + C.$$



Slika 1. Rješenja neodređenog integrala iz zadatka 1 za različite vrijednosti konstante  $c$

**Rješenje 4.** Iz izvedene formule (3) imamo da je,  $\int \frac{du}{v} = \frac{u}{v} + \int \frac{udv}{v^2}$ , te obzirom da je,  $I = \int \frac{\frac{dx}{x^2+1}}{x^2+1}$ , ako izaberemo da je  $u = \arctg x$  i  $v = x^2 + 1$ , tada je dati integral upravo u obliku  $\int \frac{du}{v}$ . Dakle,

$$I = \frac{\arctg x}{x^2 + 1} + \int \frac{\arctg x \cdot 2x dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\arctg x}{x^2 + 1} + J.$$

U integralu  $J = \int \frac{\arctg x \cdot 2x dx}{(x^2+1)^2}$ , uvedimo smjenu  $t = \arctg x$ .

Tada je  $x = \tg t \Rightarrow x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$  i  $\frac{dx}{x^2+1} = dt$ , pa je  $J = 2 \int t \cdot \tg t \cdot \cos^2 t dt =$

$$2 \int t \cdot \sin t \cdot \cos t dt = \int t \cdot \sin 2t dt.$$

Posljednji integral se rješava standardnom formulom (1) parcijalne integracije, uzimajući  $u = t$  i  $dv = \sin 2t dt$ , pa se dobija

$$J = -\frac{1}{2} t \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t + C.$$

Obzirom da je

$$\cos 2t = \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \frac{1 - \tg^2 t}{1 + \tg^2 t} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad \sin 2t = \frac{2x}{1 + x^2}$$

lako se dobije da je

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{2(x^2 + 1)} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \left( 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \right) + \frac{x}{2(x^2 + 1)} + C \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} + \frac{x}{2(x^2 + 1)} + C, \end{aligned}$$

a zatim direktno slijedi da je

$$I = \frac{1}{2} \left( \operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + C.$$

## Zadatak 2. Riješiti integral

$$I = \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$$

**Rješenje 1.** Ako u formuli parcijalne integracije,  $\int \frac{u dv}{v^2} = \int \frac{du}{v} - \frac{u}{v}$ , izaberemo da je  $u = x$  i  $v = \sin x$  odmah slijedi da je  $I = \frac{dx}{\sin x} - \frac{x}{\sin x}$ .

Integral na desnoj strani se jednostavno rješava pomoću univerzalne smjene:  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , jer se svodi na integral  $\int \frac{dt}{t}$ , dakle

$$I = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{x}{\sin x} + C.$$

**Rješenje 2.** U standardnoj formuli parcijalne integracije (1) uzmimo da je  $u = x$  i  $dv = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ .

Tada je  $v = -\frac{1}{\sin x}$ , pa je  $I = -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow I = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{x}{\sin x} + C$ .

**Rješenje 3.** Izborom funkcija  $u = \sin x$  i  $u = \sin x$  očito se dati integral pretvara u oblik  $\int \frac{du}{v}$ .

Prema formuli  $\int \frac{du}{v} = \frac{u}{v} + \int \frac{u dv}{v^2}$ , slijedi

$$I = \frac{\sin x}{\frac{\sin^2 x}{x}} + \int \frac{\sin x \cdot \frac{2x \sin x \cos x - \sin^2 x}{x^2}}{\frac{\sin^4 x}{x^2}} dx = \frac{x}{\sin x} + \int \frac{2x \cos x - \sin x}{\sin^2 x} dx$$

$$I = \frac{x}{\sin x} + 2 \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx - \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} + 2I - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

pa je očito  $I = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{x}{\sin x} + C$ .

Također, sljedeći zadaci su pogodni za rješavanje na više načina

$$1. \int \frac{1+\ln x}{x^2 \ln^2 x} dx$$

$$4. \int \frac{x^7 dx}{(x^4+1)^2}$$

$$2. \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$$

$$3. \int \frac{2 \sin x + 1}{(2 + \sin x)^2} dx$$

## Literatura

Arslanagić, Š., Milošević, D. (2015). Dvanaest načina rješavanja jednog zadatka za trougao, *MAT-KOL (Banja Luka)*, XXI(1) (2015), 41-49.

Bjelanović, Ž.(2002). Jedan zadatak – više rješenja, *Matematika i škola*, 15, 208-210.

Borzan, A., Duković, N., Gyarmati-Pavlić, Hang, I., Keglević, P., Kronfeld, B., Mardešić, V., Matulić-Bedenić, I., Stošić, D. (1991). *Riješeni zadaci iz više matematike*, Školska knjiga, Zagreb.

## SEVERAL WAYS OF SOLVING INDEFINITE INTEGRALS USING THE INTEGRATION BY PARTS FORMULA

### Abstract

*In this paper, we present the calculation of the indefinite integral in several ways, using the integration by parts formula, as well as a quotient rule integration by parts formula.*

**Key words:** *indefinite integral, integration by parts, solving tasks in several*