

Dr. sc. Safet Penjić
Dr. sc. Dževad Zečić
Dr. sc. Hermina Alajbegović

KONSTRUKCIJE DVOSTRUKO REGULARNIH GRAFOVA¹

Sažetak

U ovom radu definišemo jednu potklasu k -regularnih grafova, koja do sada nije bila izučavana i koju smo nazvali dvostruko regularni grafovi. Definicija dvostruko regularnih grafova je jedna generalizacija klase jako regularnih grafova koja je dosta značajna i dosta istražena zadnjih decenija. Novouvedeni pojam se prirodno nameće kada se uspoređi s definicijom klase kvazi jako regularnih grafova koja je također jedna od generalizacija pojma jako regularnih grafova i koju su uveli Golightly, Haynsworth i Sarvatego 1997. god. Postoji nekoliko interesantnih radova koji opisuju klasu kvazi jako regularnih grafova. U ovom radu nam je cilj pokazati da je shodno definiciji strogo i kvazi strogo regularnih grafova opravdano uvesti novi pojam i novu klasu grafova, te da uvedena klasa ima beskonačno mnogo članova koji su u vezi s dosada dobro poznatim klasama grafova kao što su ciklusi, kompletni grafovi i jako regularni grafovi.

Ključne riječi: graf, dvostruko regularni graf, konstrukcija grafa

Uvod

Prije nego što definišemo pojam dvostruko regularnih grafova, definisat ćemo pojmove strogo regularnog i kvazi strogo regularnog grafa. Za graf kažemo da je k -regularan ako svi vrhovi u grafu imaju stepen k , tj. imaju isti broj susjeda i taj broj susjeda iznosi k . Jako regularne grafove je uveo Raj Chandra Bose 1963. godine ([3]).

Definicija 1: Povezan regularan graf G stepena k je jako regularan s parametrima (n, k, λ, μ) ako ima sljedeće dvije osobine:

- a) bilo koja dva susjedna vrha imaju tačno λ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$) zajedničkih susjeda;
- b) bilo koja dva nesusjedna vrha imaju tačno μ zajedničkih susjeda.

Kvazi jako regularne grafove su definisali i proučavali Golightly i Goldberg (vidjeti [7], [8], [9] i [10]).

Definicija 2: Neka su $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ različiti nenegativni cijeli brojevi. Povezan graf G stepena k od n -vrhova je kvazi jako regularan s parametrima $(n, k, \lambda; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ ako

- a) bilo koja dva susjedna vrha imaju tačno λ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$) zajedničkih susjeda i

¹ Ovaj rad je realizacija zajedničkog naučnoistraživačkog projekta pod nazivom *Komplementi iвичno – regularnih grafova*, koji je odobren po Konkursu za sufinansiranje naučne i tehnološke saradnje između Bosne i Hercegovine (Univerzitet u Zenici) i Republike Slovenije (Univerzitet u Kopru) za period 2019. – 2020. godine.

b) bilo koja dva nesusjedna vrha imaju μ_i zajedničkih susjeda za neki i ($1 \leq i \leq p$).

Razred od kvazi jako regularnog grafa G (the grade of G) je broj indeksa $1 \leq i \leq p$ za koje postoje dva nesusjedna vrha u G sa μ_i zajedničkih susjeda. Kvazi jako regularni graf razreda 1 je jako regularan graf.

Primijetimo da za parametre $\lambda, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ vrijedi $0 \leq \lambda, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \leq k$.

Generalizacija se sastoji u tome da se nesusjednim vrhovima dopusti da imaju više od jedne mogućnosti u pogledu broja zajedničkih susjeda. No, mi sada takvu mogućnost dajemo susjednim vrhovima, dok nesusjedni vrhovi moraju imati isti broj susjeda.

Definicija 3: Za k -regularan graf G kažemo da je *CDRG-graf* s parametrima $(n, k, \lambda; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_p)$ ako ima sljedeće dvije osobine:

a) bilo koja dva nesusjedna vrha imaju tačno λ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$) zajedničkih susjeda i

b) bilo koja dva susjedna vrha imaju μ_i zajedničkih susjeda za neki i ($1 \leq i \leq p$), pri čemu još vrijedi $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots > \mu_p$.

Izučavanje klase kvazi jako regularnih grafova u opštem slučaju je dosta složen problem, ali su dobijeni zanimljivi rezultati za slučaj kvazi jako regularnih grafova razreda 2 (vidjeti [1], [7]).

Vođeni prethodnim primjerom definisat ćemo razred *CDRG-grafa* i fokusirati se u nastavku na *CDRG-grafove* razreda 2.

Razred od *CDRG-grafa* G je broj indeksa $1 \leq i \leq p$ za koje postoje dva susjedna vrha u G sa μ_i zajedničkih susjeda. *CDRG-graf* razreda 2 nazvat ćemo *dvostruko regularni graf* s parametrima $(n, k, \lambda; \mu_1, \mu_2)$.

Konstrukcija dvostruko regularnog grafa pomoću ciklusa C_n

U teoriji grafova je poznat pojam cikličnog grafa (kraće: ciklus) reda $n, n \in \mathbb{N}$ u oznaci C_n , koji ima skup vrhova $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i skup ivica $E = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}$. Taj graf je uvijek 2-regularan i ima svojstvene vrijednosti $2 \cos \frac{2\pi j}{n}$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) (vidjeti [4]).

Komplement $\bar{G}$ grafa $G = (V, E)$ je graf koji ima isti skup čvorova kao graf G , a dva vrha iz V su susjedna u grafu $\bar{G}$ ako i samo ako nisu susjedna u G .

Pokazat ćemo sada da je komplement bilo kojeg ciklusa dvostruko regularan graf.

Propozicija 1: Neka je $G = (V, E)$ ciklus C_n . Ako je $n \geq 6$, tada je $\bar{C}_n$ upravo $(n, n-3, n-4, n-5, n-6)$ -dvostruko regularni graf.

Dokaz: Neka je $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i pri tome je $x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3, \dots, x_{n-1} \sim x_n, x_n \sim x_1$. U grafu $\bar{C}_n$, vrh x_1 je susjedan sa svim vrhovima osim sa x_2, x_n i samim sobom. Slično vrijedi i za bilo koji drugi vrh iz V . Otuda imamo da je $\bar{C}_n$ regularan graf stepena $(n-3)$. Dakle, za proizvoljan vrh x_i ($i > 2$) imamo da su njegovi susjedi u grafu $\bar{G}$ svi vrhovi iz skupa $V \setminus \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$, a vrhovi koji su na udaljenosti 2 od njega su x_{i-1} i x_{i+1} . Zbog toga, u grafu $\bar{C}_n$ broj zajedničkih susjeda vrhova:

✓ x_i i x_{i+1} je $n-4$;

- ✓ x_i i x_{i-1} je $n - 4$;
- ✓ x_i i x_{i+2} je $n - 5$;
- ✓ x_i i x_{i-2} je $n - 5$;
- ✓ x_i i x_j je $n - 6$, gdje je $x_j \in V \setminus \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$.

Iz toga direktno slijedi traženi zaključak. Ova razmatranja se analogno provode za $i \leq 2$.

Lema 1:

a) Ako je n paran broj, spektar grafa $\overline{C_n}$ je:

$$\left\{ [n-3]^1, [1]^1, \left[-1 - 2\cos \frac{(n-2)\pi}{n} \right]^2, \left[-1 - 2\cos \frac{(n-4)\pi}{n} \right]^2, \dots, \left[-1 - 2\cos \frac{2\pi}{n} \right]^2 \right\}.$$

b) Ako je n neparan broj, spektar grafa $\overline{C_n}$ je:

$$\left\{ [n-3]^1, \left[-1 - 2\cos \frac{(n-1)\pi}{n} \right]^2, \left[-1 - 2\cos \frac{(n-3)\pi}{n} \right]^2, \dots, \left[-1 - 2\cos \frac{2\pi}{n} \right]^2 \right\}.$$

Dokaz: Dokaz slijedi na osnovu poznatih činjenica koje vrijede za regularan graf i njegov komplement: Ako je A matrica susjedstva grafa $G = (V, E)$, $|V| = n$ onda je $J - I - A$ matrica susjedstva komplementarnog grafa $\bar{G}$, gdje je J matrica formata $n \times n$ čiji su svi elementi jednaki 1 i I je jedinična matrica. Ako je G regularan graf valencije k , tada je $\bar{G}$ regularan graf valencije $n - k - 1$. Jedna od svojstvenih vrijednosti k - regularnog grafa je k . Ako graf G ima svojstvene vrijednosti $k \geq \vartheta_1 \geq \dots \geq \vartheta_{n-1}$, tada su svojstvene vrijednosti njegovog komplementa $n - k - 1, -1 - \vartheta_{n-1}, \dots, -1 - \vartheta_1$ (vidjeti[4]). Također su poznate i svojstvene vrijednosti od C_n . Sada je zaključak leme očigledan.

Direktno se dokazuju i sljedeća dva rezultata:

Propozicija 2: Ako je oznakom $G' = (V', E')$ označen ciklus C_4 , a oznakom $G'' = (V'', E'')$ -ciklus $C_n, n \geq 5$ i ako je $G = G' \cup G''$, tada je $\bar{G}$ upravo $(n+4, n+1, n, n-2, n-1)$ -dvostruko regularni graf.

Propozicija 3: Neka $G', G'', \dots, G^{(h)}$ redom označavaju cikluse $C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_h}$, gdje je $h \geq 2$ i $n \geq 5$ za sve $n \in \{n_1, n_2, \dots, n_h\}$. Ako je $G = G' \cup G'' \cup \dots \cup G^{(h)}$, tada je $\bar{G}$ upravo $(m, m-3, m-4, m-5, m-6)$ - dvostruko regularni graf, gdje je $m = n_1 + n_2 + \dots + n_h$.

Konstrukcija dvostruko regularnog grafa pomoću kompletnog grafa K_n

U teoriji grafova pod kompletnim grafom reda $n, n \in \mathbb{N}$, podrazumijeva se graf sa n vrhova i maksimalnim brojem ivica, tj. svaka dva vrha su susjedni.

Propozicija 4: Neka su $G' = (V', E')$ i $G'' = (V'', E'')$ kompletni grafovi reda n , pri čemu je $V' = \{x', y', \dots, z'\}$ i $V'' = \{x'', y'', \dots, z''\}$. Ako je $V = V' \cup V''$ i $E = E' \cup E'' \cup \{\{x', x''\}, \{y', y''\}, \dots, \{z', z''\}\}$ tada je $G = (V, E)$ $(2n, n, 2, n-2, 0)$ - dvostruko regularni graf.

Dokaz: Neka je $w' \in V'$ proizvoljan vrh. Tada postoji vrh $w'' \in V''$ s kojim je w' susjedan. Skup svih susjeda vrha w' je čitav skup $(V' \setminus \{w'\}) \cup \{w''\}$, a skup svih susjeda vrha w'' je $(V'' \setminus \{w''\}) \cup \{w'\}$. Dakle, vrhovi w' i w'' nemaju zajedničkih susjeda. Primijetimo da su vrhovi iz skupa $V'' \setminus \{w''\}$ na udaljenosti 2 od vrha w' . Sada nije teško zaključiti da je broj zajedničkih

susjeda vrhova v i w' jednak $n - 2$, gdje je $v \in V' \setminus \{w'\}$, te najzad svaki vrh u koji je na udaljenosti 2 od vrha w' ima s vrhom w' 2 zajednička susjeda.

Lema 2: Spektar grafa G iz Propozicije 4 je:

$$\{[n]^1, [n - 2]^1, [0]^{n-1}, [-2]^{n-1}\}.$$

Dokaz: Označimo s A –matrica susjedstva grafa G . Tada vrijedi:

$$A + I = \begin{bmatrix} J_n & I_n \\ I_n & J_n \end{bmatrix}$$

Pri čemu je I – jedinična matrica formata $(2n) \times (2n)$, J_n – matrica formata $n \times n$ čiji su svi elementi jedinice, te I_n – jedinična matrica formata $n \times n$.

Izračunajmo svojstvene vrijednosti matrice $A + I$.

$$\det(A + I - \theta I) = \det \begin{bmatrix} J_n - \theta \cdot I_n & I_n \\ I_n & J_n - \theta \cdot I_n \end{bmatrix}$$

Iskoristit ćemo formule za: množenje blok matrica, računanje determinanti blok matrica i formulu $\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$, gdje su M i N kvadratne matrice istog reda. O blok matricama čitalac može pronaći informacije u [6] i [11].

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_n - \theta \cdot I_n & I_n \\ I_n & J_n - \theta \cdot I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & J_n - \theta \cdot I_n \\ J_n - \theta \cdot I_n & I_n \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \left(\det \begin{bmatrix} J_n - \theta \cdot I_n & I_n \\ I_n & J_n - \theta \cdot I_n \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} I_n & J_n - \theta \cdot I_n \\ J_n - \theta \cdot I_n & I_n \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & (\det(A + I - \theta I)) \cdot (-1)^n = \det(I_n - (J_n - \theta \cdot I_n)^2) \\ \Rightarrow & (\det(A + I - \theta I)) \cdot (-1)^n = \det(-I_n) \left((J_n - \theta \cdot I_n)^2 - I_n \right) \\ \Rightarrow & (-1)^n \cdot \det(A + I - \theta I) = \det(-I_n) \cdot \det \left((J_n - \theta \cdot I_n)^2 - I_n \right) \\ \Rightarrow & (-1)^n \cdot \det(A + I - \theta I) = (-1)^n \cdot \det \left((J_n - \theta \cdot I_n)^2 - I_n \right) \\ \Rightarrow & \det(A + I - \theta I) = \det \left((J_n - \theta \cdot I_n)^2 - I_n \right) \end{aligned}$$

$$(J_n - \theta \cdot I_n)^2 = \begin{bmatrix} 1-\theta & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\theta & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-\theta \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} 1-\theta & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\theta & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-\theta \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (1-\theta) \cdot (1-\theta) + 1 + \dots + 1 & (1-\theta) + (1-\theta) + 1 + \dots + 1 & \dots & (1-\theta) + 1 + 1 + \dots + 1 + (1-\theta) \\ (1-\theta) + (1-\theta) + 1 + \dots + 1 & 1 + (1-\theta) \cdot (1-\theta) + 1 + \dots + 1 & \dots & 1 + (1-\theta) + 1 + \dots + 1 + (1-\theta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-\theta) + 1 + \dots + (1-\theta) + 1 & 1 + (1-\theta) + 1 + \dots + (1-\theta) + 1 & \ddots & 1 + 1 + \dots + 1 + (1-\theta) + (1-\theta) \\ (1-\theta) + 1 + \dots + 1 + (1-\theta) & 1 + (1-\theta) + 1 + \dots + 1 + (1-\theta) & \dots & 1 + 1 + 1 + \dots + (1-\theta) \cdot (1-\theta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1-\theta)^2 + (n-1) & n-2\theta & \dots & n-2\theta \\ n-2\theta & (1-\theta)^2 + (n-1) & \dots & n-2\theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-2\theta & \dots & \ddots & n-2\theta \\ n-2\theta & n-2\theta & \dots & (1-\theta)^2 + (n-1) \end{bmatrix}_{n \times n}
\end{aligned}$$

$$\det \left((J_n - \theta \cdot I_n)^2 - I_n \right) = \begin{vmatrix} (1-\theta)^2 + (n-2) & n-2\theta & \dots & n-2\theta \\ n-2\theta & (1-\theta)^2 + (n-2) & \dots & n-2\theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-2\theta & \dots & \ddots & n-2\theta \\ n-2\theta & n-2\theta & \dots & (1-\theta)^2 + (n-2) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{dodati svekolone prvoj koloni}}{=} \begin{vmatrix} (1-\theta)^2 + (n-2) + (n-1)(n-2\theta) & n-2\theta & \dots & n-2\theta \\ (1-\theta)^2 + (n-2) + (n-1)(n-2\theta) & (1-\theta)^2 + (n-2) & \dots & n-2\theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-\theta)^2 + (n-2) + (n-1)(n-2\theta) & \dots & \ddots & n-2\theta \\ n-2\theta & n-2\theta & \dots & (1-\theta)^2 + (n-2) \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \left((1-\theta)^2 + (n-2) + (n-1)(n-2\theta) \right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & n-2\theta & \dots & n-2\theta \\ 1 & (1-\theta)^2 + (n-2) & \dots & n-2\theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \ddots & n-2\theta \\ 1 & n-2\theta & \dots & (1-\theta)^2 + (n-2) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{množimo prvi red s -1i dodajemo drugom, trećem, ..., redu}}{=} (\theta - (n+1)) \cdot (\theta - (n-1)) \cdot \begin{vmatrix} 1 & n-2\theta & \dots & n-2\theta \\ 0 & (1-\theta)^2 + (n-2) - n + 2\theta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (1-\theta)^2 + (n-2) - n + 2\theta \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (\theta - (n+1)) \cdot (\theta - (n-1)) \cdot \left((1-\theta)^2 + (n-2) - n + 2\theta \right)^{n-1} = (\theta - (n+1)) \cdot (\theta - (n-1)) \cdot (\theta^2 - 1)^{n-1}$$

Ako sa θ_i označimo jednu od svojstvenih vrijednosti matrice $A + I$, a pripadni svojstveni vektor s $\mathbf{x}$ tada imamo: $(A + I)\mathbf{x} = \theta_i \mathbf{x} \Rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{x} = \theta_i \mathbf{x} \Rightarrow A = (\theta_i - 1)\mathbf{x}$. Dakle, svojstvene vrijednosti grafa $G = (V, E)$ su svojstvene vrijednosti matrice $A + I$ umanjene za 1.

Kartezijski proizvod grafova $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ je graf $G \times G'$ kod koga je skup vrhova $V \times V'$, a susjedne vrhove definišemo ovako:

$$(u, v) \sim (a, b) \Leftrightarrow (u = a \wedge vb \in E') \vee (v = b \wedge ua \in E).$$

Lema 3: Neka je K_n kompletni graf sa n vrhova. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

- a) Za $n \geq 2$, graf $G = K_n \times K_n$ je $(n^2, 2n - 2, 2, n - 2)$ – strogo regularni graf.
- b) Za $m, n \geq 2$ i $m \neq n$, graf $G' = K_n \times K_m$ je $(mn, m + n - 2, 2, m - 2)$ – dvostruko regularni graf.

Dokaz: $G = K_n \times K_m$ je graf sa mn vrhova, regularan sa stepenom $m + n - 2$ i ima dijametar 2. Neka su (x, i) i (y, j) dva različita vrha u $K_n \times K_m$. Zanima nas broj zajedničkih susjeda ta dva vrha. Ako koristimo oznaku $N_\Gamma(u)$ za skup susjeda vrha u u odgovarajućem grafu Γ , odnosno $|N_\Gamma(u)|$ kao broj tih susjeda, imamo da je

$$|N_G(x, i) \cap N_G(y, j)| = \begin{cases} |N_{K_m}(i) \cap N_{K_m}(j)|, & \text{ako je } x = y \\ |N_{K_n}(x) \cap N_{K_n}(y)|, & \text{ako je } i = j \\ 2, & \text{inače} \end{cases}.$$

Konstrukcija dvostruko regularnog grafa pomoću strogo regularnog grafa

Propozicija 1: Neka su $G' = (V', E')$ i $G'' = (V'', E'')$ redom (n', k', μ', λ') i $(n'', k'', \mu'', \lambda'')$ – strogo regularni grafovi. Ako je $G = G' \cup G''$, tada je $\bar{G}$ dvostruko regularni graf s parametrima $(2n', 2n' - k' - 1, 2n' + \lambda' - 2k', 2n' + \mu' - 2k' - 2, 2n' - 2k' - 2)$ ako i samo ako je $n' = n'', k' = k'', \mu' = \mu''$ i $\lambda' = \lambda''$.

Dokaz: Uzmimo proizvoljne vrhove $x \in V'$ i $y \in V''$. Označimo sa $\Gamma'_1(x)$, $\bar{\Gamma}_1(x)$ skup svih susjeda vrha x u grafovima G' i $\bar{G}$ respektivno i sa $\Gamma'_2(x)$ skup svih vrhova koji su na udaljenosti 2 od vrha x u grafu G' . To su u stvari svi vrhovi iz V' koji nisu susjedni sa vrhom x u G' . Slično sa $\Gamma''_1(y)$, $\bar{\Gamma}_1(y)$ označimo skup svih susjeda vrha y u grafovima G'' i $\bar{G}$ respektivno i sa $\Gamma''_2(y)$ skup svih vrhova koji su na udaljenosti 2 od vrha y u grafu G'' .

Očito je $|\Gamma'_1(x)| = k'$, $|\Gamma'_2(x)| = n' - k' - 1$, $|\Gamma''_1(y)| = k''$ i $|\Gamma''_2(y)| = n'' - k'' - 1$.

$$|\bar{\Gamma}_1(x)| = |\Gamma'_2(x) \cup V''| = n'' + n' - k' - 1$$

$$|\bar{\Gamma}_1(y)| = |\Gamma''_2(y) \cup V'| = n' + n'' - k'' - 1$$

$$|\bar{\Gamma}_1(x)| = |\bar{\Gamma}_1(y)| \Leftrightarrow k' = k''$$

Vidimo da je $\bar{G}$ regularan graf ako i samo ako je $k' = k''$ i da je tada stepen valencije jednak $n'' + n' - k' - 1$.

Posmatrajmo dva vrha x, z iz V' koja su susjedna u G' . Tada ta dva vrha nisu susjedna u $\bar{G}$. Neka $\Gamma'_1(x), \bar{\Gamma}_1(x), \Gamma'_1(z), \bar{\Gamma}_1(z)$ označavaju iste skupove kao na početku dokaza.

$$|\Gamma'_1(x) \cap \Gamma'_1(z)| = \lambda'$$

$$|\Gamma'_2(x) \cap \Gamma'_2(z)| = n' - (2k' - \lambda')$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Gamma}_1(x) = \Gamma'_2(x) \cup V'' \\ \bar{\Gamma}_1(z) = \Gamma'_2(z) \cup V'' \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(z) = V'' \cup (\Gamma'_2(x) \cap \Gamma'_2(z)) \Rightarrow |\bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(z)| = n'' + n' - (2k' - \lambda')$$

Slično, ako uzmemo dva vrha $y, v \in V''$ koja su susjedna u G'' i posmatramo susjede tih vrhova u $\bar{G}$, dobit ćemo:

$$|\Gamma''_1(y) \cap \Gamma''_1(v)| = \lambda''$$

$$|\Gamma''_2(y) \cap \Gamma''_2(v)| = n'' - (2k'' - \lambda'')$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Gamma}_1(y) = \Gamma''_2(y) \cup V' \\ \bar{\Gamma}_1(v) = \Gamma''_2(v) \cup V' \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\Gamma}_1(y) \cap \bar{\Gamma}_1(v) = V' \cup (\Gamma''_2(y) \cap \Gamma''_2(v)) \Rightarrow |\bar{\Gamma}_1(y) \cap \bar{\Gamma}_1(v)| = n' + n'' - (2k'' - \lambda'')$$

Ako pretpostavimo da je $\bar{G}$ dvostruko regularan graf tada je broj zajedničkih susjeda bilo koja dva nesusjedna vrha isti, odakle je $|\bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(z)| = |\bar{\Gamma}_1(y) \cap \bar{\Gamma}_1(v)| \Rightarrow \lambda' = \lambda''$.

Iz $\lambda' = \lambda''$ i $k' = k''$ zaključujemo da je $\bar{G}$ regularan graf, pri čemu bilo koja dva nesusjedna vrha imaju konstantan broj zajedničkih vrhova.

Sada ćemo razmatrati broj zajedničkih susjeda dva susjedna vrha u $\bar{G}$.

Postoje sljedeći podslučajevi:

1) Neka su x, z iz V' vrhovi koji nisu susjedna u G' . Tada su ta dva vrha susjedna u $\bar{G}$ i vrijedi:

$$|\Gamma'_1(x) \cap \Gamma'_1(z)| = \mu'$$

$$|\Gamma'_2(x) \cap \Gamma'_2(z)| = n' - (2k' - \mu') - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Gamma}_1(x) = \Gamma'_2(x) \cup V'' \\ \bar{\Gamma}_1(z) = \Gamma'_2(z) \cup V'' \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(z) = V'' \cup (\Gamma'_2(x) \cap \Gamma'_2(z)) \Rightarrow |\bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(z)| = n'' + n' - (2k' - \mu') - 2$$

2) Slično, ako uzmemo dva vrha $y, v \in V''$ koja nisu susjedna u G'' i posmatramo susjede tih vrhova u $\bar{G}$, dobit ćemo:

$$|\Gamma''_1(y) \cap \Gamma''_1(v)| = \mu''$$

$$|\Gamma''_2(y) \cap \Gamma''_2(v)| = n'' - (2k'' - \mu'') - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Gamma}_1(y) = \Gamma''_2(y) \cup V' \\ \bar{\Gamma}_1(v) = \Gamma''_2(v) \cup V' \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\Gamma}_1(y) \cap \bar{\Gamma}_1(v) = V' \cup (\Gamma''_2(y) \cap \Gamma''_2(v)) \Rightarrow |\bar{\Gamma}_1(y) \cap \bar{\Gamma}_1(v)| = n' + n'' - (2k'' - \mu'') - 2$$

3) Neka su $x \in V', y \in V''$. Tada je x susjedan s vrhom y .

$$|\bar{\Gamma}_1(x)| = |\Gamma'_2(x) \cup V''| = n'' + n' - k' - 1$$

$$|\bar{\Gamma}_1(y)| = |\Gamma''_2(y) \cup V'| = n' + n'' - k'' - 1$$

$$|\bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(y)| = |\Gamma'_2(x) \cap \Gamma''_2(y)| = n' - k' - 1 + n'' - k'' - 1$$

Sada direktno iz pretpostavke $n' = n'', k' = k'', \mu' = \mu''$ i $\lambda' = \lambda''$ slijedi da je $\bar{G}$ dvostruko regularni graf s parametrima $(2n', 2n' - k' - 1, 2n' + \lambda' - 2k', 2n' + \mu' - 2k' - 2, 2n' - 2k' - 2)$. Također, iz pretpostavke da je $\bar{G}$ dvostruko regularni graf s parametrima $(2n', 2n' - k' - 1, 2n' + \lambda' - 2k', 2n' + \mu' - 2k' - 2, 2n' - 2k' - 2)$ slijedi da je $n' = n'', k' = k'', \mu' = \mu''$ i $\lambda' = \lambda''$.

Lema 1: Ako je spektar grafa G' iz Propozicije 1 $\{[k']^1, [r]^f, [s]^g\}$, tada je spektar grafa $\bar{G}$ iz te propozicije jednak $\{[2n' - k' - 1]^1, [-s - 1]^{2g}, [-r - 1]^{2f}, [-k' - 1]^1\}$.

Dokaz: Neka su $G' = (V', E')$ i $G'' = (V'', E'')$ redom (n', k', μ', λ') i $(n'', k'', \mu'', \lambda'')$ –strogo regularni grafovi. S obzirom na dokaz propozicije 1 imamo da je $G' = G''$. Označimo sa A' matricu susjedstva grafa $G' = (V', E')$, a sa A matricu susjedstva grafa $G = G' \cup G''$. Tada se matrica susjedstva grafa G može prikazati kao blok matrica: $A = \begin{bmatrix} A' & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & A' \end{bmatrix}$.

Otuda je:

$\det(A - \theta I_{2n' \times 2n'}) = (\det(A' - \theta I_{n' \times n'}))^2$. Povezan strogo regularan graf ima tri svojstvene vrijednosti (vidjeti [2], Th. 6.21, Th. 6.23). Ako su k', r i s svojstvene vrijednosti matrice A' , onda su na osnovu jednakosti $\det(A - \theta I_{2n' \times 2n'}) = (\det(A' - \theta I_{n' \times n'}))^2$, k', r i s svojstvene vrijednosti i matrice A . Ostatak dokaza slijedi iz veze između svojstvenih vrijednosti regularnih grafova i njihovih komplementata. Rezultat o svojstvenim vrijednostima komplementnog grafa od unije dva ili više strogo regularnih grafova dat je u [5] bez dokaza.

Propozicija 2: Neka su $G' = (V', E')$, $G'' = (V'', E'')$, ..., $G^{(h)} = (V^{(h)}, E^{(h)})$ strogo regularni grafovi sa parametrima (n', k', μ', λ') , $(n'', k'', \mu'', \lambda'')$, ..., $(n^{(h)}, k^{(h)}, \mu^{(h)}, \lambda^{(h)})$. Ako je $G = G' \cup G'' \cup \dots \cup G^{(h)}$, tada je $\bar{G} = (hn', hn' - k' - 1, hn' + \lambda' - 2k', hn' + \mu' - 2k' - 2, hn' - 2k' - 2)$ – dvostruko regularni graf ako i samo ako je $n' = n'' = \dots = n^{(h)}, k' = k'' = \dots = k^{(h)}, \mu' = \mu'' = \dots = \mu^{(h)}$ i $\lambda' = \lambda'' = \dots = \lambda^{(h)}$.

Dokaz: Izvodi se analogno dokazu Propozicije 1.

Lema 2: Ako je spektar grafa G' iz Propozicije 2 $\{[k']^1, [r]^f, [s]^g\}$, tada je spektar grafa $\bar{G}$ iz te propozicije jednak $\{[hn' - k' - 1]^1, [-s - 1]^{hg}, [-r - 1]^{hf}, [-k' - 1]^{h-1}\}$.

Dokaz: Izvodi se analogno dokazu Lemel.

Reference

- [1] Hermina, A., Almir, H., Štefko, M., Primož, Š., On the Extendability of Quasi-Strongly Regular Graphs with Diameter 2, *Graphs and Combinatorics*, 34, 2018, 711-726
- [2] Ravindra, B. B., **Graphs and Matrices**, Universitext, Springer, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

- [3] Raj Chandra B., Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs, *Pacific J. Math* 13 (1963) 389–419. (p. 122)
- [4] Andries E. B., Willem H. H., **Spectra of graphs**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 2012; dostupno na internetu: <http://homepages.cwi.nl/~aeb/math/ipm/>.
- [5] van Dam, E.R., Regular graphs with four eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* 226/228 (1995), 135-162
- [6] Howard E., **Elementary matrix theory**, Reprint of the 1966 edition. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1980.
- [7] Goldberg, F., On quasi-strongly regular graphs, *Linear Multilinear Algebra*, 54, 2006, 437 - 451
- [8] Goldberg, F. Laplacians of Graphs, Quasi - Strongly Regular Graphs and Completely Positive Graphs, Master thesis, Israel Institute of Technology, 2004
- [9] Golightly, W., Haynsworth, W., Sarvate, D. G., A family of connected quasi strongly regular graphs, *Congressus Numerantium*, 124, 1997, 89 - 95
- [10] Golightly, W., Haynsworth, W., Sarvate, D. G., A symmetric difference construction of strongly regular graphs, *Bulletion of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 24, 1998, 51 - 56.
- [11] Fuzhen Z., **The Schur Complement and Its Applications**, Springer Verlag, New York, 2005.

THE CONSTRUCTION OF DOUBLE REGULAR GRAPHS

Summary

In this paper, we define a subclass of k -regular graphs, which has not been studied so far, and which we have called double-regular graphs. The definition of double-regular graphs is a generalization of the class of strongly-regular graphs that has been quite significant and has been explored a lot in the last decades. The newly introduced term naturally comes into existence when compared to the definition of the class of quasi- strongly regular graphs, which is also one of the generalizations of the class of strongly regular graphs. The class of strongly regular graphs is defined by Golightly, Haynsworth, and Sarvatego in 1997. There are several interesting papers describing the class of quasi strongly regular graphs. In this paper, we want to show that the introduction of a new term is justified and natural and that a defined class has infinitely many members associated with hitherto well-known graph classes such as cycles, complete graphs, and strongly regular graphs.

Key words: graph, doubly regular graph, construct graph