

Dr. sc. Almir Huskanović

SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI REGULARNIH GRAFOVA¹**Sažetak**

Svojstvena vrijednost grafa se definiše kao svojstvena vrijednost njegove matrice susjedstva. Posebno nas zanimaju svojstvene vrijednosti regularnih grafova.

Ključne riječi: regularni graf, svojstvena vrijednost grafa

Uvod

U teoriji grafova matrica susjedstva je jedan od standardnih pojmova. ([6])

Definicija 1: Matrica susjedstva grafa $G = (V, E)$ kod koga je skup vrhova $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je matrica formata $n \times n$ koju obilježavamo sa $A(G)$, $A(G) = [a_{ij}]$, pri čemu je

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \sim x_j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

S druge strane, u linearnoj algebri (vidi [2], [3]) definiše se da je realni ili kompleksni broj λ svojstvena vrijednost matrice $A = [a_{ij}]$ formata $n \times n$ ako za neki vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ (matrica kolona formata $n \times 1$, takva da među njenim elementima bar jedan nije 0) vrijedi: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ –takav vektor onda zovemo svojstvenim vektorom. U ovim razmatranjima uvodnog dijela, podrazumijevaće se da su svi elementi matrice A realni brojevi. Za proizvoljnu matricu M , sa $r(M)$ označavamo rang te matrice.

Ako je λ svojstvena vrijednost matrice A , tada je $\det(A - \lambda I) = 0$, pri čemu je I jedinična matrica (formata $n \times n$). Sam polinom $k(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ (ili $k(\lambda) = \det(\lambda I - A)$) zovemo karakterističnim polinomom matrice A . To je polinom stepena n , pa zato matrica A formata $n \times n$ ima tačno n svojstvenih vrijednosti, koje ne moraju biti realni brojevi, a takođe ne moraju biti međusobno različite.

Ukoliko je λ nul tačka polinoma $k(\lambda)$ višestrukosti s , reći ćemo takođe da je s višestrukost svojstvene vrijednosti λ matrice A .

Takođe, poznato je da su sve svojstvene vrijednosti simetrične matrice realni brojevi i da je trag (kvadratne) matrice (tj. zbir svih brojeva na glavnoj dijagonali te matrice) jednak zbiru svih svojstvenih vrijednosti matrice. Što se tiče svojstvenih vektora simetrične matrice, oni su međusobno okomiti, odnosno za svaku simetričnu matricu može se naći odgovarajući ortonormirani skup svojstvenih vektora, a vrijedi i obrnuto.

Takođe, u linearnoj algebri poznati su i sljedeći rezultati (vidi [2], [3]):

¹ Ovaj rad je realizacija zajedničkog naučnoistraživačkog projekta pod nazivom *Komplementi i vično-regularnih grafova*, koji je odobren po Konkursu za sufinansiranje naučne i tehnološke saradnje između Bosne i Hercegovine i Republike Slovenije za period 2019.-2020. godine.

Teorem 1: Broj nenulih svojstvenih vrijednosti matrice A , uključujući njihove višestrukosti, jednak je rang matrice A . Višestrukost svojstvene vrijednosti λ matrice A formata $n \times n$ jednak je $v = n - r(A - \lambda I)$.

Teorem 2: Matrica A ima svoju inverznu matricu A^{-1} ako i samo ako joj broj 0 nije svojstvena vrijednost. Osim toga, ukoliko su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \neq 0$ svojstvene vrijednosti, a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ svojstveni vektori matrice A , tada su $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ svojstvene vrijednosti matrice A^{-1} uz iste odgovarajuće svojstvene vektore $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.

Svojstvena vrijednost grafa, spektar grafa

Definicija 2: Svojstvena vrijednost grafa $G = (V, E)$ je svojstvena vrijednost njegove matrice susjedstva.

Ukoliko je graf G jednostavan (neorijentisani graf bez petlji i paralelnih ivica), njegova matrica susjedstva je uvijek simetrična, a na glavnoj dijagonali su joj nule. Zbog toga, možemo tvrditi da su sve svojstvene vrijednosti jednostavnog grafa realni brojevi. U nastavku se podrazumijeva da radimo samo sa jednostavnim grafovima.

Definicija 3: Skup svih svojstvenih vrijednosti grafa $G = (V, E)$ zovemo spektrom tog grafa. Označavaćemo ga oznakom $S(G)$.

Ukoliko graf $G = (V, E)$ ima n vrhova, te ukoliko su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ različite svojstvene vrijednosti tog grafa, čije su višestrukosti redom $v_1, v_2, \dots, v_r$, tada je $v_1 + v_2 + \dots + v_r = n$, a spektar grafa ćemo navesti ovako:

$$S(G) = \{[\lambda_1]^{v_1}, [\lambda_2]^{v_2}, \dots, [\lambda_r]^{v_r}\}.$$

S obzirom na napomene iz uvodnog dijela i činjenicu da su na glavnoj dijagonali matrice susjedstva jednostavnog grafa nule, jasno je da za jednostavni graf G važi sljedeća

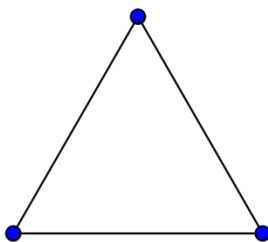
Lema 1: Uz gore uvedene oznake

$$\sum_{i=1}^r v_i \lambda_i = 0,$$

tj. suma svih svojstvenih vrijednosti grafa jednaka je nuli. ([1])

Primjer 1: Za kompletni graf K_3 na slici 1 (koji je ujedno i ciklus) sa 3 vrha imamo da je

njegova matrica susjedstva $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, pa je



Slika 1: graf K_3

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda + 1)^2.$$

Dakle, $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -1$ su svojstvene vrijednosti grafa K_3 , sa odgovarajućim višestrukostima $v_1 = 1$ i $v_2 = 2$, pa je onda $S(K_3) = \{[2]^1, [-1]^2\}$.

U opštem slučaju, za kompletni graf K_n , gdje je n proizvoljni prirodni broj, matricu susjedstva možemo napisati u obliku: $A = J - I$, pri čemu je J matrica formata $n \times n$ čiji su svi elementi jedinice. Na glavnoj dijagonali te matrice su nule, a svi ostali njeni elementi su jedinice.

Pošto je rang matrice J : $r(J) = 1$, prema Teoremu 1 slijedi da ta matrica ima samo jednu nenultu svojstvenu vrijednost. Lako je vidjeti da je to broj n , jer za vektor $\vec{x}_1 = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ (sve koordinate su mu jedinice) vrijedi: $J\vec{x}_1 = n\vec{x}_1$. Preostale svojstvene vrijednosti matrice J su nule. Dalje, za svaki vektor $\vec{x}$ imamo da je $A\vec{x} = (J - I)\vec{x} = J\vec{x} - \vec{x}$. Specijalno, uzimajući da je $\vec{x} = \vec{x}_1$, dobili bismo: $A\vec{x}_1 = (n - 1)\vec{x}_1$ što znači da je vektor $\vec{x}_1$ svojstveni vektor matrice A (a ujedno i grafa K_n) kome odgovara svojstvena vrijednost $\lambda_1 = n - 1$ višestrukosti $v_1 = 1$.

Uočimo još da je $A + I = J \Rightarrow \det(A - (-1)I) = \det(J) = 0$, što znači da je $\lambda_2 = -1$ –druga svojstvena vrijednost matrice A . Njena višestrukost (prema Teoremu 1) jednaka je $v_2 = n - r(A + I) = n - 1$. Najzad, pošto je $v_1 + v_2 = n$, to znači da graf K_n nema drugih svojstvenih vrijednosti, pa je njegov spektar $S(K_n) = \{[n - 1]^1, [-1]^{n-1}\}$.

Primjer 2: Ciklični graf (ciklus) reda $n, n \in \mathbb{N}$, u oznaci C_n ima skup vrhova $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i skup ivica $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. Otuda je njegova matrica susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako je $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tada se lako provjeri da je

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

jer je $L \cdot L^{-1} = I$, dakle $A = L + L^{-1}$.

Neka je λ svojstvena vrijednost matrice L sa odgovarajućim svojstvenim vektorom $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, tj. $L\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Pošto je

$$L\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{bmatrix}, \text{ te } \lambda\vec{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_{n-1} \\ \lambda x_n \end{bmatrix}, \text{ slijedi:}$$

$$x_2 = \lambda x_1, x_3 = \lambda x_2, \dots, x_n = \lambda x_{n-1}, x_1 = \lambda x_n.$$

Iz zadnjeg sistema imamo: $x_1 = \lambda x_n = \lambda^2 x_{n-1} = \dots = \lambda^n x_1$.

Ako je $x_1 = 0$, tada je i $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, što je nemoguće. Zato iz $\lambda^n x_1 = x_1$ slijedi da je $\lambda^n = 1 \Rightarrow \lambda = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Neka je $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ i odaberimo da je $x_1 = 1$. Tada imamo n svojstvenih vrijednosti matrice L : $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$ (svi sa višestrukošću 1) uz odgovarajuće svojstvene vektore

$$\vec{x}_k = [1, w^k, w^{2k}, \dots, w^{(n-1)k}]^T, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Prema Teoremu 2, matrica L^{-1} ima iste ove svojstvene vektore sa svojstvenim vrijednostima: $1, w^{-1}, w^{-2}, \dots, w^{-(n-1)}$.

Najzad, što se tiče matrice susjedstva ciklusa C_n , njeni svojstveni vektori su takođe $\vec{x}_k$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, jer je

$$A\vec{x}_k = (L + L^{-1})\vec{x}_k = (w^k + w^{-k})\vec{x}_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Dakle, svojstvene vrijednosti ciklusa C_n su:

$$w^k + w^{-k} = 2\cos\frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Spektar ciklusa C_n je $S(C_n) = \left\{ [2]^1, \left[2\cos\frac{2\pi}{n}\right]^1, \left[2\cos\frac{4\pi}{n}\right]^1, \dots, \left[2\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]^1 \right\}$.

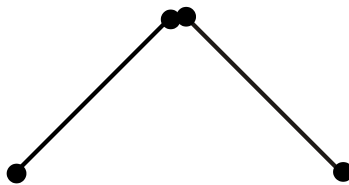
Svojstvene vrijednosti regularnih grafova

Graf $G = (V, E)$ je k -regularan ako svaki njegov vrh ima tačno k susjeda. Lako je pokazati da je u tom slučaju broj k upravo jedna svojstvena vrijednost grafa G . Naime, ako je $A(G) = [a_{ij}]$ matrica susjedstva tog grafa formata $n \times n$, te ako je $\vec{v} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ (vektor čije su koordinate n jedinica), imamo da je

$$A(G) \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} = k \cdot \vec{v}.$$

Dakle, očito je vektor $\vec{v}$ svojstveni vektor k -regularnog grafa G koji odgovara svojstvenoj vrijednosti k . Međutim, što se tiče višestrukosti te svojstvene vrijednosti, ona zavisi od toga da li je graf G povezan. ([4])

Primjer 3: Graf G na slici je direktna suma kompletnog grafa K_2 sa njim samim. Dakle, $G = K_2 \dot{+} K_2$, ima 4 vrha i nepovezan je.



Slika 2: Graf $K_2 + K_2$

Ovaj graf je očito 1 – regularan i ima dvije komponente povezanosti. Spektar grafa K_2 je prema Primjeru 1: $S(K_2) = \{[1]^1, [-1]^1\}$. To znači da je karakteristični polinom ovog grafa $k_1(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Matrica susjedstva grafa K_2 je $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, dok je matrica susjedstva grafa G :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ a možemo je pisati i u obliku blok matrice:}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{bmatrix}.$$

Pri tome je O nula matrica.

$$\text{Očito je } A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - \lambda I & O \\ O & A_1 - \lambda I \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice A je $k(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2 = [k_1(\lambda)]^2$.

Analogan zaključak možemo izvesti u opštem slučaju direktne sume dva grafa.

Teorem 3: Ako je graf $G = G_1 + G_2$ direktna suma grafova G_1 i G_2 , tada je karakteristični polinom matrice susjedstva grafa G jednak proizvodu karakterističnih polinoma svojstvenih matrica grafova G_1 i G_2 .

Dokaz: Ako je A matrica susjedstva grafa G , a A_1 i A_2 tada je, slično kao u Primjeru 3

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$$

iz čega direktno slijedi tvrdnja teorema. ■

Posljedica 1: Karakteristični polinom matrice susjedstva grafa $G_1 + G_2 + \dots + G_n$ (direktna suma grafova $G_1, G_2, \dots, G_n$) jednak je proizvodu karakterističnih polinoma svojstvenih matrica grafova $G_1, G_2, \dots, G_n$.

Teorem 4: Ako je graf $G = (V, E)$ povezan k –regularan graf, tada je broj k svojstvena vrijednost tog grafa višestrukosti 1. Međutim, ako je G nepovezan k –regularan graf sa m komponenti povezanosti, tada je višestrukost svojstvene vrijednosti k jednaka m . ([4], [5])

Dokaz: Već smo pokazali da je broj k svojstvena vrijednost grafa G , ukoliko je on k –regularan i da je u tom slučaju odgovarajući svojstveni vektor $\vec{v} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$. Pretpostavimo da je $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \neq \vec{0}$ neki svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti k , tj. $A\vec{x} = k\vec{x}$, gdje je A matrica susjedstva grafa G . Uz pretpostavku da je $|V| = n$ i $A = [a_{ij}]$, slijedi:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}, \text{ dok je } k\vec{x} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da između koordinata $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektora $\vec{x}$ koordinata x_j ima najveću apsolutnu vrijednost. Pošto je $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = kx_j$, te ako u sumi n sabiraka na lijevoj strani uzmemo u obzir da je među njima k koji nisu 0, jer ako je

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i $a_{ji} = 1$, to znači da su vrhovi v_i i v_j susjedni, a u suprotnom je $a_{ji} = 0$, pa time i $a_{ji}x_i = 0$. Zbog toga, ako iz sume $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n$ izbacimo sve koji su jednaki nuli, dobićemo:

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k} = kx_j$$

za neke $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

S obzirom da je $|x_j| \geq x_{i_l}$ za sve $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ ovo je moguće samo ako je $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_k} = x_j$.

Ako je G povezan graf, tada mi možemo nastaviti ovaj postupak analogno dalje, posmatrajući koordinate vektora $\vec{x}$ različite od x_j . Očito ćemo onda dobiti da su sve koordinate vektora $\vec{x}$ jednake, tj. $\vec{x} = [p \ p \ \dots \ p]^T = p \cdot \vec{v}$ za neki broj $p \neq 0$. Time smo dokazali da je svojstvena vrijednost k povezanog grafa G sa višestrukošću 1.

Pretpostavimo sada da je G nepovezan k –regularan graf sa m komponenti povezanosti. Svaka od tih komponenti je povezan k –regularan podgraf kome je $\lambda = k$ svojstvena vrijednost višestrukosti 1. Očito je da tada graf G možemo pisati u vidu direktne sume m povezanih grafova, tj. $G = G_1 \dot{+} G_2 \dot{+} \dots \dot{+} G_m$. Prema Posljedici 1, karakteristični polinom matrice susjedstva grafa G jednak je proizvodu karakterističnih polinoma svojstvenih matrica grafova $G_1, G_2, \dots, G_m$. Imajući u vidu da je $\lambda = k$ jednostruka nul tačka svakog od tih karakterističnih polinoma, slijedi da je višestrukost svojstvene vrijednosti $\lambda = k$ upravo jednaka broju m .

Literatura

- [1] D.M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Applications*, Johann Ambrosius Barth Verlag, 1995.
- [2] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2006.
- [3] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [4] S. Penjić, *Algebarske karakterizacije udaljeno-regularnih grafova*, Magistarski rad, PMF Sarajevo, 2013.
- [5] A.J. Schwenk, R.J. Wilson, On the eigenvalues of a graph, *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press (1979.), 307.-336.
- [6] D. Stevanović, M. Ćirić, S. Simić, V. Baltić, *Diskretna matematika*, DMS, Beograd, 2008.

EIGENVALUES OF REGULAR GRAPHS

Summary

The eigenvalues of a graph are defined as the eigenvalues of its adjacency matrix. We are particularly interested in the eigenvalues of regular graphs.

Key words: regular graph, eigenvalues of a graph