

Dr. sc. Naida Bikić
Dr. sc. Dževad Burgić
Martina Šimičić

METODIČKI PRISTUP OBRADI JEDNADŽBI I NEJEDNADŽBI U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Sažetak

Metodički pristup zadacima vezanim uz jednadžbe i nejednadžbe na razini prvih pet razreda osnovne škole u udžbenicima koji potječu iz različitih nastavnih planova i programa, te njihov utjecaj na razvoj logičko-matematičkog znanja učenika razredne nastave su polazište i glavna teza ovog rada. Devetogodišnja osnovna škola je uvedena 2003. godine u školama koje rade i po hrvatskom i po bosanskom nastavnom planu i programu u Federaciji BiH. Ipak, usporedna analiza udžbenika otkriva značajne razlike u metodičkom pristupu obradi zadataka vezanih uz jednadžbe i nejednadžbe. Pitanje je koliko su duboke te razlike i u kojoj mjeri će one utjecati na konačnu razinu postignutoga znanja u prvih pet razreda osnovne škole. Ovo istraživanje bi trebalo otkriti jesu li, i u kojoj mjeri, krajnji ciljevi i zadaci metodike početne nastave matematike jednako ostvareni.

Ključne riječi: početna nastava matematike, jednadžbe, nejednadžbe, grafička metoda.

Uvod

Iako neki metodičari smatraju kako učenici jednadžbe i nejednadžbe treba da upoznaju tek u predmetnoj nastavi, nastavno gradivo početne nastave matematike zasićeno je zadacima u čijoj su osnovi jednadžbe i nejednadžbe koje treba obraditi na način primjeren uzrastu i sposobnostima učenika uvažavajući metodičke zakonitosti usvajanja sadržaja. Kroz ovo istraživanje analizirat će se zastupljenost jednadžbi i nejednadžbi u Okvirnom nastavnom planu i programu za devetogodišnju osnovnu školu u Federaciji Bosne i Hercegovine (u daljem tekstu NPPFBiH)¹ i Nastavni plan i program na hrvatskome jeziku za devetogodišnje osnovne škole u Bosni i Hercegovini (u daljem tekstu NPPHRBiH)² kroz analizu udžbenika, te uvidjeti na koji način autori udžbenika pristupaju problematici istih, postoje li razlike u nastavnim planovima i programima, te na koncu postoji li razlika u uspješnosti i načinu rješavanja tekstualnih zadataka kod učenika podučavanih po različitim nastavnim planovima i programa.

Jednadžbe i nejednadžbe u početnoj nastavi matematike

Jednadžbe daju temelje za rješavanje problemskih zadataka. „Postoji nekoliko zadataka koje valja ostvariti obradom sadržaja o jednadžbama i nejednadžbama, a to su: formirati pojam

¹ <https://skolegijum.ba/static/files/pdf/docs/52df9345338c0.pdf>

² <https://skolegijum.ba/static/files/pdf/docs/52df9391d7f0c.pdf>

jednadžbe/nejednadžbe, osposobiti učenike da rješavaju jednadžbe/nejednadžbe, formirati naviku kod učenika da provjeravaju tačnost rješenja jednadžbi/nejednadžbi, te osposobiti učenike da rješavaju zadatke uz pomoć jednadžbi/nejednadžbi.“ (Maričić i Špijunović, 2016: 315) Kako bi se formirale jednadžbe i nejednadžbe, najprije se trebaju formirati relacije jednako ($=$), veće od ($>$) i manje od ($<$), tj. treba se formirati pojam jednakosti i nejednakosti. Zahtjevi programa u početnoj nastavi matematike svode se na to da učenici ovladaju rješavanjem jednadžbi sa jednom računskom operacijom u okviru određenog bloka brojeva i to prvo pomoću grafičke metode ili metode crtanja, zatim pomoću „držača mjesta“, a tek onda pomoću slova kao oznake za nepoznati broj. Krajnji cilj je da učenici na osnovu inverznosti računskih operacija otkriju postupke određivanja nepoznatog broja, te shvate ulogu jednadžbi i nejednadžbi u životnim situacijama. Kako bi osposobili učenike da rješavaju jednadžbe, obradi istih treba metodički pristupiti kroz četiri koraka: stvoriti realnu situaciju, grafički prikazati na različite načine (preko skupova, ideografom na brojevnom polupravcu ili sl.), na problem reagirati zapisom jednadžbe i zadnji korak pri rješavanju jednadžbe uvijek treba da bude provjera rješenja. „Važno je napomenuti da rješavanje jednadžbi samo na osnovu pravila nije samo po sebi cilj početne nastave matematike. Cilj je da učenici razumiju postupak rješavanja jednadžbi, da mogu reagirati na datu situaciju zapisivanjem jednadžbe, da na osnovu inverznosti računskih operacija otkrivaju postupke određivanja nepoznatog broja, da uvijek vrše provjeru tačnosti pojedinog rješenja i shvate ulogu jednadžbi u rješavanju realnih problema.“ (Maričić i Špijunović, 2016: 321). Sadržajima sa nejednadžbama pristupa se nakon što su učenici upoznali zavisnost računskih operacija od promjene komponenata. Nejednadžbe u početnoj nastavi matematike rješavaju se na sljedeći način: pogađanjem rješenja odnosno heurističkim postupkom, zatim određivanjem skupa rješenja pomoću tablice ili rješavanjem odgovarajuće jednadžbe koja se dobije kada se u datoj nejednadžbi znak manje ili više zamijeni znakom jednakosti te se na taj način uoči funkcionalna zavisnost rezultata računskih operacija od promjene komponenti.

Problemi i hipoteze

Prvi zadatak ovog istraživanja bio je utvrditi zastupljenost jednadžbi i nejednadžbi u udžbenicima propisanim prema dva različita nastavna plana i programa, te na osnovu toga utvrditi uspješnost i način rješavanja (pomoću računara ili pomoću nepoznate veličine) tekstualnih zadataka učenika podučavanih po različitim nastavnim planovima i programima.

U skladu sa zadacima formulirane su hipoteze istraživanja.

Hipoteza 1. *Sadržaj sa jednadžbama i nejednadžbama jednako je zastupljen u udžbenicima koji prate dva različita nastavna plana i programa*

Hipoteza 2. *Nema statistički značajne razlike u uspješnosti rješavanja tekstualnih zadataka između učenika koji su početnu nastavu matematike izučavali po različitim nastavnim planovima i programima*

Hipoteza 3. *Pretpostavlja se kako će učenici koji su matematiku učili po NPPHRBiH kod rješavanja tekstualnih zadataka koristiti račun bez nepoznate.*

Hipoteza 4. *Pretpostavlja se kako će učenici koji su matematiku učili po NPPFBiH kod rješavanja tekstualnih zadataka koristiti nepoznatu veličinu.*

Definiranje varijabli istraživanja

Nezavisne varijable:

- *Dob* – ispitivanje je provedeno sa učenicima petog razreda devetogodišnjeg školovanja
- *Spol* – dječaci i djevojčice.
- *Vrsta zadataka* – tekstualni zadaci

Zavisna varijabla – *uspješnost ispitanika u rješavanju tekstualnih zadataka.*

Populacija i uzorak istraživanja

Za analizu metodologije koja je zastupljena u udžbenicima različitih nastavnih planova i programa korišteni su udžbenici Moja matematika 1,2,3,4 i 5 autora Vildana Mujakić, Dijana Kovačević, te Žarmen Hamidović kao udžbenici pisani po okvirnom *NPPFBiH* od izdavača Vrijeme Zenica/NAM Tuzla, te udžbenike Matematika 1,2,3,4 i 5, Josip Markovac, Vinko Zorić, ALFA Mostar koji prate *NPPHRBiH*. U istraživanje su bile uključene škole koje predmet Matematika realiziraju po spomenutim nastavnim planovima i programima i to po jedna osnovna škola u Žepču i u Zenici. U istraživanju je sudjelovalo 100 učenika petog razreda osnovne škole, a biranje škola, razreda i učenika je odabrano slučajnim uzorkom.

Rezultati istraživanja i njihova interpretacija

Sličnosti i razlike analiziranih nastavnih planova i programa u metodičkom pristupu jednadžbama i nejednadžbama u početnoj nastavi matematike

IZDAVAČ / UDŽBENIK	Grafička metoda	Znakovi za relacije ($<$, $>$, $=$)	Slovo kao oznaka za nepoznati broj „držač mjesta“	Pojam jednadžbe	Pojam nejednadžbe	Jednadžbe sa zbrajanjem i oduzimanjem	Nejednadžbe sa zbrajanjem i oduzimanjem	Jednadžbe sa množenjem i dijeljenjem	Nejednadžbe sa množenjem i dijeljenjem	Određivanje nepoznatog broja $x > a$, $x < a$, $x \geq a$, $x \leq a$, $a < x < b$
NAM Tuzla/ Vrijeme Zenica	✓ 1 razred	✓ 1 razred ($=$, $\neq$, $<$, $>$)	✓ 2 razred	✓ 3 razred	✓ 3 razred	✓ 2 razred	✓ 4 razred	✓ 3 razred	✓ 3 razred	✓ 3 razred
ALFA Mostar	Nema primjera	✓ 2 razred ($=$, $<$, $>$)	Nema primjera	Nema primjera	Nema primjera	Nema primjera	Nema primjera	Nema primjera	Nema primjera	Nema primjera

Tabela 1. Check lista: Zastupljenost sadržaja jednadžbi i nejednadžbi u početnoj nastavi matematike prema različitim programima

NPPHRBiH vodi se metodikom početne nastave matematike Josipa Markovca koji smatra kako su jednađbe i nejednađbe nastavno gradivo koje se obrađuje u predmetnoj nastavi, te da se svi zadaci u početnoj nastavi matematike rješavaju putem računa i logičkog zaključivanja. S druge strane u udžbenicima propisanim od Federalnog ministarstva obrazovanja i nauke autori već od drugoga razreda devetogodišnje osnovne škole uvode slovo kao oznaku za broj i rješavaju jednađbe sa zbrajanjem i oduzimanjem, te gradivo nastavljaju proširivati u svakom narednom razredu. Hipoteza kako je sadržaj sa jednađbama i nejednađbama jednako zastupljen u dva navedena nastavna plana i programa nije potvrđena, što se vidi iz Tabele 1. Rezultati ovoga istraživanja otvaraju nam pitanje jesu li učenici nastavnog plana i programa na hrvatskome jeziku uskraćeni za nastavno gradivo jednađbi i nejednađbi ili jesu li ovi drugi učenici prijevremeno pretrpani sadržajima jednađbi i nejednađbi, te na koji način to djeluje na njihov razvoj logičko-matematičke sposobnosti.

Uspješnost rješavanja tekstualnih zadataka učenika učenih prema dva različita nastavna plana i programa

Pretpostavka je bila kako nema značajne razlike u uspješnosti rješavanja tekstualnih zadataka između učenika podučavanih po dva različita nastavna plana i programa tj. učenika koji su obrađivali sadržaje jednađbi i nejednađbi i učenika koji nisu obrađivali sadržaje jednađbi i nejednađbi u početnoj nastavi matematike. T-testom neovisnih uzoraka uspoređeni su rezultati zaključnih ocjena na prvom polugodištu učenika različitih nastavnih planova i programa iz predmeta matematika. Kako bi dobili što validnije rezultate bilo je potrebno imati uzorke što sličnije građe. U anketi je sudjelovalo 50 učenika jednog i 50 učenika drugog nastavnog plana i programa. I jedni i drugi učenici pohađali su centralnu školu. Također, ne postoji značajna razlika između prosječne ocjene na kraju polugodišta iz matematike između tih učenika različitih nastavnih programa. Za poređenje aritmetičke sredine zaključnih ocjena na polugodištu između te dvije skupine, koristili smo t-test neovisnih uzoraka koji su nam pokazali da nema statistički značajne razlike u zaključnim ocjenama između dvije grupe učenika, $t(98) = 1,550, p = 0,560 > 0,01$ (obostrano) što je prikazano Tabelom 3, a u Tabeli 2 su prikazane prosječne zaključene ocjene iz matematike na prvom polugodištu.

Group Statistics					
	Nastavni plan i program:	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Zaključna ocjena iz matematike na prvom polugodištu	NPPFBiH	50	4.16	.842	.119
	NPPHRBiH	50	3.88	.961	.136

Tabela 2. Aritmetička sredina zaključnih ocjena na polugodištu

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances	t-test for Equality of Means								
		F	Sig.	T	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Zaključna ocjena matematika	Equal variances assumed	.342	.560	1.550	98	.124	.280	.181	-.079	.639
	Equal variances not assumed			1.550	96.322	.125	.280	.181	-.079	.639

Tabela 3. Razlika između prosječne zaključene ocjene uzoraka učenika

Statistička razlika između uspješnosti rješavanja tekstualnih zadataka između učenika podučavanim po NPPHRBiH i NPPFBiH nije značajna; $t = 1,684$ ($p = 0,165 > 0,01$).

Group Statistics

	Program	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Suma	NPPHRBiH	50	4.8000	3.85450	.54511
	NPPFBiH	50	5.9200	2.69421	.38102

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances	t-test for Equality of Means								
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper

Equal variances assumed	1.957	.165	1.684	98	.095	1.12000	.66507	-.19981	2.43981
Suma Equal variances not assumed			1.684	87.653	.096	1.12000	.66507	-.20176	2.44176

Tabela 4. Uspjeh učenika nakon rješavanja tekstualnih zadataka

U zadacima 1,4,5,6 postoji statistički značajna razlika, i to zadatke 1,4,5 su bolje (statistički značajno) uradili učenici NPPFBiH, a zadatak 6 učenici NPPHRBiH. U zadacima 2 i 3 nema statistički značajne razlike. U konačnici hipoteza H2 je potvrđena. Nema statistički značajne razlike u uspješnosti rješavanja tekstualnih zadataka između učenika podučavanih po različitim nastavnim planovima i programima.

Pristup i način rješavanja tekstualnih zadataka

Treći istraživački zadatak odnosi se na pristup i način rješavanja tekstualnih zadataka učenika petih razreda. Sve zadatke ankete moguće je riješiti na dva načina: pomoću računa i uvođenjem nepoznate veličine. Ovim istraživačkim zadatkom željelo se utvrditi na koji način tekstualnim zadacima pristupaju učenici podučavani po različitim nastavnim planovima i programima.

Group Statistics

	Grupa	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Jednadžbe	NPPFBiH	50	.5200	.61412	.08685
	NPPHRBiH	50	1.1800	1.32002	.18668
Nejednadžbe	NPPFBiH	50	1.2000	.40406	.05714
	NPPHRBiH	50	.8600	.92604	.13096

Independent sample test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2- tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper

jednadzbe	Equal variances assumed	56.197	.000	3.206	98	.002	-.66000	.20589	1.06859	.25141
	Equal variances not assumed			3.206	69.262	.002	-.66000	.20589	1.07072	.24928
nejednadzbe	Equal variances assumed	90.205	.000	2.380	98	.019	.34000	.14289	.05645	.62355
	Equal variances not assumed			2.380	67.005	.020	.34000	.14289	.05480	.62520

Tabela 5. T-test: Korištenje nepoznate veličine pri rješavanju tekstualnih zadataka

Rezultati su pokazali kako se učenici koji su nepoznatu veličinu usvojili u drugom razredu manje koriste nepoznatom veličinom pri rješavanju tekstualnih zadataka nego učenici koji prema nastavnom planu i programu nisu obrađivali sadržaje jednadžbi i nejednadžbi. Učenici koji su radili po NPPHRBiH su kod rješavanja zadataka 1, 2, 5 i 6 postavljali jednačinu i bili značajno uspješniji ($t = 3,206, p < 0,01$), dok su učenici podučavani po NPPFBiH kod rješavanja tekstualnih zadataka kod kojih je trebalo primijeniti znanje iz nejednadžbi bili značajno uspješniji i koristili nepoznatu ($t = 2,380, p < 0,01$) u odnosu na svoje vršnjake podučavane po drugom nastavnom planu i programu (Tabela 5).

Treća i četvrta hipoteza nisu potvrđene. Učenici podučavani po NPPFBiH više se oslanjaju na račun nego na nepoznatu veličinu prilikom rješavanja tekstualnih zadataka, dok neki učenici podučavani po NPPHRBiH pri rješavanju tekstualnih zadataka koriste nepoznatu veličinu. Najviše poteškoća učenicima i jednog i drugog nastavnog plana i programa zadali su zadaci sa nejednadžbama. Većina učenika ne razumije mogućnost skupa kao rješenja nejednadžbe. Učenici koji su bili najuspješniji u rješavanju svih zadataka jesu učenici koji su provjeravali tačnost rješenja, međutim njih je veoma malo. Učenici nemaju naviku provjeravanja rješenja zadatka i zadacima pristupaju formalno što dovodi do slabijeg uspjeha prilikom rješavanja istih.

Zaključak

Formiranje pojma jednadžbe i nejednadžbe i njihovo rješavanje osnovni su zadaci početne nastave matematike. Ovladati vještinom ne samo rješavanja, nego i razumijevanja jednadžbi i nejednadžbi ključno je za svakog učenika. Matematika je svuda oko nas i bez nje ne možemo opstati u svijetu. Velika je važnost načina uvođenja učenika u svijet matematike. Način na koji učenicima „serviramo“ matematiku, zasigurno će utjecati na njihov kognitivni, kreativni, logičko-matematički razvoj. Kroz ovaj istraživački rad došlo se do rezultata koji pokazuju kako nema

značajne statističke razlike u uspješnosti rješavanja tekstualnih zadataka između učenika koji su obrađivali sadržaje jednadžbi i nejednadžbi u početnoj nastavi matematike i učenika koji prema nastavnom planu i programu nisu izučavali te sadržaje. Međutim, rezultati su pokazali da učenici bez obzira na način na koji su podučavani, radije se pri rješavanju problema oslanjaju na logiku i račun, nego na pravila jednadžbi i nejednadžbi. Rezultati upućuju da profesori razredne nastave ipak uvode nepoznatu veličinu kod rješavanja tekstualnih zadataka iako nastavnim planom i programom to nije predviđeno. Sumirajući sve rezultate i činjenice, može se doći do zaključka kako je najvažnije od svega pred učenike početne nastave matematike staviti realne, stvarne probleme koji će zahtijevati njihovu uključenost i razmišljanje, te učiti ih provjeri rješenja. To je način koji vodi do uspjeha i ostvarenja glavnog cilja, bez obzira kojim putem koračali.

Literatura

1. Liebeck, P., (1990): *Kako djeca uče matematiku*, EDUCA, Zagreb
2. Markovac, J., (1992): *Metodika početne nastave matematike*, Školska knjiga, Zagreb
3. Markovac, J., Zorić, V., (2010): *Matematika, Udžbenik za četvrti razred devetogodišnje osnovne škole*, ALFA, Mostar
4. Markovac, J., Zorić, V., (2010): *Matematika, Udžbenik za drugi razred devetogodišnje osnovne škole*, ALFA, Mostar
5. Markovac, J., Zorić, V., (2010): *Matematika, Udžbenik za peti razred devetogodišnje osnovne škole*, ALFA, Mostar
6. Markovac, J., Zorić, V., (2010): *Matematika, Udžbenik za prvi razred devetogodišnje osnovne škole*, ALFA, Mostar
7. Markovac, J., Zorić, V., (2010): *Matematika, Udžbenik za treći razred devetogodišnje osnovne škole*, ALFA, Mostar
8. Mujakić, V., Hamidović, Ž., Kovačević, D., (2011): *Moja matematika, Udžbenik za peti razred devetogodišnje osnovne škole*, Vrijeme, Zenica i NAM, Tuzla
9. Mujakić, V., Kovačević D., Hamidović, Ž., (2011): *Moja matematika, Udžbenik za drugi razred devetogodišnje osnovne škole*, Vrijeme, Zenica i NAM, Tuzla
10. Mujakić, V., Kovačević D., Hamidović, Ž., (2011): *Moja matematika, Udžbenik za treći razred devetogodišnje osnovne škole*, Vrijeme, Zenica i NAM, Tuzla
11. Mujakić, V., Kovačević D., Hamidović, Ž., (2011): *Moja matematika, Udžbenik za četvrti razred devetogodišnje osnovne škole*, Vrijeme, Zenica i NAM, Tuzla
12. Mujakić, V., Kovačević, D., (2011): *Moja matematika, Udžbenik za prvi razred devetogodišnje osnovne škole*, Vrijeme, Zenica i NAM, Tuzla
13. Špijunović, K., Maričić, S., (2016): *Metodika početne nastave matematike*, Bratis, Užice

METHODICAL APPROACH IN LEARNING EQUATIONS AND NON-EQUATIONS IN PRIMARY TEACHING OF MATHEMATICS

Summary

The methodical approach of textbooks produced according to diverse school curricula to exercises based around equations and inequations and their influence on the development of logical and mathematical knowledge of primary school students from the first to the fifth primary grade is the focal point and the main thesis of this master's thesis. The nine-grade primary school was introduced in 2003 in schools that work according to both Croatian and Bosnian curriculum in The Federation of Bosnia and Herzegovina. However, the juxtaposition of text books made according to the two mentioned curricula reveals significant discrepancies in the methodical approach to equations and inequation. The question is, how deep are these differences and how are they going to affect the level of the acquired knowledge at the end of the primary school? This research should reveal whether and in what measure the initial educational and methodical goals of both curricula are achieved.

Key words: *initial mathematics teaching equations, non-equations, graphical method*