

Dr. sc. Safet Penjić¹
Dr. sc. Almir Huskanović
Dr. sc. Hermina Alajbegović

KONSTRUKCIJE DVOSTRUKO REGULARNIH GRAFOVA (DRUGI DIO)

Sažetak

Ovaj rad je nastavak rada „Konstrukcije dvostruko regularnih grafova“, koji je objavljen u Zborniku radova Filozofskog fakulteta 2019. godine, u kojem je uvedena jedna nova potklasa k -regularnih grafova, tzv. klasa dvostruko regularnih grafova. U tom radu je pokazano da ta nova klasa nije prazna, štaviše da ima beskonačno mnogo članova, te su konstruisani primjeri nove klase uz pomoć grafova široko poznatih klasa, kao što su ciklički grafovi, kompletni grafovi i jako regularni grafovi. U ovom radu će biti pokazano kako se mogu konstruisati dvostruko regularni grafovi uz pomoć udaljeno-regularnih grafova i k -regularnih grafova. Istraživanje provedeno u ovom radu može se koristiti za prijenos i povezivanje nekih poznatih činjenica o klasama grafova koji se koriste u konstrukcijama s klasom dvostruko regularnih grafova.

Ključne riječi: graf, dvostruko regularni graf, konstrukcija grafa, udaljeno-regularan graf

Uvod

Prisjetimo se pojmova: k -regularnih, jako regularnih, udaljeno-regularnih i dvostruko regularnih grafova koje smo uveli u [8]. Za graf kažemo da je k -regularan ako svi vrhovi u grafu imaju stepen k (svaki vrh ima k susjeda). Udaljenost između dva vrha u i v u grafu G je broj ivica u najkraćem putu između ta dva vrha.

Definicija 1: Povezan regularan graf G stepena k je jako regularan s parametrima (n, k, λ, μ) ako ima sljedeće dvije osobine:

- bilo koja dva susjedna vrha imaju tačno λ ($\lambda \in \mathbb{N}_0$) zajedničkih susjeda;
- bilo koja dva nesusjedna vrha imaju tačno μ zajedničkih susjeda.

Pretpostavimo da je $G = (V, E)$ graf s n vrhova dijametra d . Za bilo koji vrh $u \in V$ i za bilo koji cijeli broj i , $0 \leq i \leq d$, neka $\Gamma_i(u)$ označava skup vrhova iz V na udaljenosti i od u .

Ako je $v \in \Gamma_i(u)$ i w susjed od v , tada w mora biti na udaljenosti $i - 1$, i ili $i + 1$ od u . Neka $c_i(u)$, $a_i(u)$ i $b_i(u)$ označavaju redom broj susjeda vrha v na udaljenosti $i - 1$, i i $i + 1$ od u .

¹ Ovaj rad je realizacija zajedničkog naučno-istraživačkog projekta pod nazivom *Komplementi ivično-regularnih grafova*, koji je odobren po Konkursu za sufinansiranje naučne i tehnološke saradnje između Bosne i Hercegovine (Univerzitet u Zenici) i Republike Slovenije (Univerzitet u Kopru) za period 2019.-2020. godine.

Definicija 2: Za graf $G = (V, E)$ kažemo da je udaljeno-regularan graf (distance-regular graph) ako parametri $c_i(u)$, $a_i(u)$ i $b_i(u)$ ne zavise od izbora vrhova u i v , već samo od razdaljine i .

Ako je $G = (V, E)$ udaljeno-regularan graf tada parametre $c_i(u)$, $a_i(u)$ i $b_i(u)$ kraće zapisujemo: c_i , a_i i b_i .

Stavimo parametre c_i , a_i i b_i , $0 \leq i \leq d$, u matricu na sljedeći način:

$$\begin{pmatrix} * & c_1 & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ a_0 & a_1 & \ddots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_d & * \end{pmatrix}$$

Izravno se vidi da je $c_0 = b_d = a_0 = 0$, $c_1 = 1$ i da je b_0 valencija (stepen) bilo kojeg vrha, pa ako je graf $G = (V, E)$ k -regularan graf tada je $b_0 = k$, valencija grafa. Jednostavno se provjerava da važi jednakost $c_i + a_i + b_i = k$ za svaki i , tako da je srednji red u gornjoj matrici suvišan. Stoga se gornji niz parametara često skraćuje na sljedeći način: $\{k, b_1, \dots, b_{d-1}; 1, c_2, \dots, c_d\}$. Ovaj niz karakterizira udaljeno-regularni graf $G = (V, E)$ i naziva se presječni niz udaljeno-regularnog grafa $G = (V, E)$ (eng. intersection array).

Udaljeno-regularne grafove je prvi put uveo Biggs 1974. godine, prilikom proučavanja nešto uže klase grafova od ove (vidjeti [2]).

Definicija 3: Za k -regularan graf G kažemo da je *CDRG-graf* s parametrima $(n, k, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ako ima sljedeće dvije osobine:

- a) bilo koja dva nesusjedna vrha imaju tačno μ ($\mu \in \mathbb{N}_0$) zajedničkih susjeda i
- b) bilo koja dva susjedna vrha imaju λ_i zajedničkih susjeda za neki i ($1 \leq i \leq p$), pri čemu još vrijedi $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$.

Primijetimo da za parametre $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ vrijedi $0 \leq \mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \leq k$.

Definicija 4: Razred od *CDRG-grafa* G je broj indeksa $1 \leq i \leq p$ za koje postoje dva susjedna vrha u G sa λ_i zajedničkih susjeda. *CDRG-graf* razreda 2 nazvat ćemo *dvostruko regularnim grafom* s parametrima $(n, k, \mu; \lambda_1, \lambda_2)$.

Komplement $\bar{G}$ grafa $G = (V, E)$ je graf koji ima isti skup vrhova kao graf G , a dva vrha iz V su susjedna u grafu $\bar{G}$ ako i samo ako nisu susjedna u G .

Klasu dvostruko regularnih grafova su kratko proučavali Z. Xi-en i J. Wei u [7]. Oni su ovu klasu nazvali generaliziranim jako regularnim grafovima. Propozicija 2. se poklapa s jednim dijelom Theorema 1.1 u [7], no uprkos tome smo je ostavili kao dio ovog rada jer smo ovdje dali nešto drugačiji dokaz u odnosu na onaj u [7]. Kao što smo u samom uvodu rekli, mi promatramo novu klasu grafova, tako da na internetu nismo uspjeli pronaći još radova koji imaju preklapanja s temom koju obrađujemo.

Konstrukcija dvostruko regularnog grafa pomoću udaljeno-regularnog grafa

Propozicija 1: Neka je $G = (V, E)$ označava udaljeno-regularan graf s n vrhova, stepena k s presječnim nizom $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$. Ako je $d \geq 3$, tada je $\bar{G}$ upravo $(n, n - k - 1, n - k - 1 - b_1; n - 2k - 2 + c_2, n - 2k - 2)$ dvostruko regularan graf.

Dokaz: Neka je $x \in V$ proizvoljan vrh. Posmatrajmo razdaljinsku particiju vrha x u G . Koristit ćemo oznake:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(x) &:= \{v \in V | d(v, x) = 1 \text{ posmatrano u grafu } G\}, \\ \Gamma_2(x) &:= \{v \in V | d(v, x) = 2 \text{ posmatrano u grafu } G\}, \\ &\vdots \\ \Gamma_d(x) &:= \{u \in V | d(u, x) = d\}.\end{aligned}$$

Do kraja dokaza posmatrat ćemo razdaljinsku particiju vrha x u $\bar{G}$. Primijetimo da je

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_1(x) &:= \{v \in V | d(u, x) = 1 \text{ posmatrano u grafu } \bar{G}\} = \Gamma_2(x) \cup \dots \cup \Gamma_d(x) \text{ i} \\ \bar{\Gamma}_2(x) &:= \{v \in V | d(u, x) = 2 \text{ posmatrano u grafu } \bar{G}\} = \Gamma_1(x).\end{aligned}$$

Jasno je da je $|\bar{\Gamma}_1(x)| = n - k - 1$. Neka je $z \in \Gamma_1(x)$. Vrhovi x i z nisu susjedni u grafu $\bar{G}$. Tada je $|\bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(z)| = n - k - 1 - b_1$. Naime, b_1 vrhova je bilo susjedno s vrhom z u grafu G , a na udaljenosti 2 od vrha x . To znači da vrh z neće biti susjedan s tim vrhovima u $\bar{G}$, dok će vrh x biti susjedan. Ako bi među susjedima vrha x u $\bar{G}$ bio još neki vrh koji nije susjedan sa z u $\bar{G}$, to bi značilo da je taj vrh bio susjedan sa z , a nije sa x u G , i to bi povlačilo da je taj vrh na udaljenosti 2 od vrha x u G , pa se već nalazi među ovih b_1 vrhova koje smo odbili od ukupnog broja susjeda vrha x u $\bar{G}$.

Neka je sada $u \in \Gamma_2(x)$. Tada postoji c_2 zajedničkih susjeda vrhova u i x u grafu G . Otuda broj zajedničkih vrhova u grafu $\bar{G}$ je $|\bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(u)| = n - k - 1 - a_2 - b_2 - 1 = n - k - 1 - a_2 - b_2 - c_2 + c_2 - 1 = n - k - 1 - k + c_2 - 1 = n - 2k - 2 + c_2$. Ako je $u \in \Gamma_3(x) \cup \dots \cup \Gamma_d(x)$, tada u i x nemaju zajedničkih susjeda u G , pa je $|\bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(u)| = n - k - 1 - k - 1 = n - 2k - 2$. Time je dokaz propozicije završen. ■

Korolar 1: Neka vrijede pretpostavke Propozicije 1 i neka je dijametar grafa $G = (V, E)$ $d = 3$. Tada dvostruko regularan graf $\bar{G}$ ima tačno 4 svojstvene vrijednosti.

Dokaz: Poznato je da udaljeno-regularni grafovi dijametra d imaju $d + 1$ različitih svojstvenih vrijednosti ([5], [3, str. 178]). Povrh toga, svojstvene vrijednosti od $G = (V, E)$ su svojstvene vrijednosti sljedeće $(d + 1) \times (d + 1)$ tridijagonalne matrice:

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & L & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & M & 0 \\ M & c_2 & a_2 & L & M \\ M & M & 0 & a_{d-1} & b_{d-1} \\ 0 & 0 & L & c_d & a_d \end{pmatrix}.$$

Komplement povezanog regularnog grafa s četiri svojstvene vrijednosti također je takav graf, osim ako je nepovezan (vidjeti[6]).

Propozicija 2: Neka $G' = (V', E')$ označava udaljeno-regularan graf s n' vrhova i presječnim nizom $\{k', b'_1, \dots, b'_{d-1}; c'_1, \dots, c'_d\}$ i neka $G'' = (V'', E'')$ označava jako regularan graf s parametrima $(n'', k'', \lambda'', \mu'')$. Ako je $G = G' \cup G''$, $a'_1 = \lambda''$, $k' = k''$ i $d \geq 3$, onda je $\bar{G}$ CDRG-graf s parametrima $(n' + n'', n' + n'' - k' - 1, n' + n'' - 2k' + a'_1; n' + n'' - 2k' - 2 + \mu'', n' + n'' - 2k' - 2 + c'_2, n' + n'' - 2k' - 2)$.

Dokaz: Izaberimo proizvoljno $x \in V'$ i $y \in V''$. Posmatrajmo razdaljinske particije vrhova x i y u grafovima G' i G'' respektivno:

$$\begin{aligned}\Gamma'_1(x) &:= \{v \in V' | d(v, x) = 1 \text{ posmatrano u grafu } G'\}, \\ \Gamma'_2(x) &:= \{v \in V' | d(v, x) = 2 \text{ posmatrano u grafu } G'\}, \\ &\vdots \\ \Gamma'_d(x) &:= \{u \in V' | d(u, x) = d, \text{ posmatrano u grafu } G'\}, \\ \Gamma''_1(y) &:= \{v \in V'' | d(v, y) = 1 \text{ posmatrano u grafu } G''\}, \\ \Gamma''_2(y) &:= \{v \in V'' | d(v, y) = 2 \text{ posmatrano u grafu } G''\}.\end{aligned}$$

Primijetimo da je $|\Gamma'_1(x)| = k'$, $|\Gamma'_2(x)| + \dots + |\Gamma'_d(x)| = n' - k' - 1$, $|\Gamma''_1(y)| = k''$ i $|\Gamma''_2(y)| = n'' - k'' - 1$.

Do kraja dokaza posmatrat ćemo razdaljinske particije vrhova x i y u $\bar{G}$. Primijetimo da je

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_1(x) &:= \{v \in V' \cup V'' | d(u, x) = 1 \text{ posmatrano u grafu } \bar{G}\} \\ &= \Gamma'_2(x) \cup \dots \cup \Gamma'_d(x) \cup \{y\} \cup \Gamma''_1(y) \cup \Gamma''_2(y) \text{ i} \\ \bar{\Gamma}_1(y) &:= \{v \in V' \cup V'' | d(u, y) = 1 \text{ posmatrano u grafu } \bar{G}\} \\ &= \Gamma'_1(x) \cup \dots \cup \Gamma'_d(x) \cup \Gamma''_2(y) \cup \{x\}.\end{aligned}$$

Jasno je da je $|\bar{\Gamma}_1(x)| = |\bar{\Gamma}_1(y)|$ ako i samo ako je $k' = k''$ i da je u tom slučaju $|\bar{\Gamma}_1(x)| = n' + n'' - k' - 1$. Dakle, ako je $k' = k''$ onda je $\bar{\Gamma}$ regularan graf valencije $n' + n'' - k' - 1$.

Ako je $z \in \Gamma'_1(x)$, tada x i z nisu susjedni u $\bar{\Gamma}$. a'_1 označava broj susjeda vrha x na udaljenosti 1 od vrha z , drugim riječima to je broj zajedničkih susjeda vrhova x i z u G' . Za svako $z \in \Gamma'_1(x)$ imamo $|\bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(z)| = n' + n'' - 2k' + a'_1 = n' + n'' - k' - 1 - b'_1$ i za svako $w \in \Gamma''_1(y)$ imamo $|\bar{\Gamma}_1(y) \cap \bar{\Gamma}_1(w)| = n' + n'' - 2k'' - 2 + \lambda''$. Ovo implicira da je $|\bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(z)| = \mu = |\bar{\Gamma}_1(y) \cap \bar{\Gamma}_1(w)|$ ako i samo ako je $a'_1 = \lambda''$.

Neka je $u \in \Gamma'_2(x)$. Tada su u i x susjedni u $\bar{\Gamma}$. Za svako $u \in \Gamma'_2(x)$ imamo $|\bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(u)| = n' - k' - 1 - a'_2 - b'_2 - 1 + n'' = n' + n'' - 2k' - 2 + c'_2$ i za svako $v \in \Gamma''_2(y)$ imamo $|\bar{\Gamma}_1(y) \cap \bar{\Gamma}_1(v)| = n' + n'' - 2k'' - 2 + \mu''$.

Za svaki $z \in \Gamma'_3(x) \cup \dots \cup \Gamma'_d(x)$, $|\bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(z)| = n' + n'' - 2k' - 2$. Također, za svako $w \in V''$, $|\bar{\Gamma}_1(x) \cap \bar{\Gamma}_1(w)| = |\bar{\Gamma}_1(y) \cap \bar{\Gamma}_1(z)| = n' + n'' - 2k'' - 2$.

Time je dokaz propozicije završen.

Propozicija 3: Neka $G_1^{(i)} = (V_1^{(i)}, E_1^{(i)})$ označava jako regularan graf s parametrima $(n^{(i)}, k^{(i)}, a_1^{(i)}, c_2^{(i)})$ ($1 \leq i \leq l$) i neka $G_2^{(j)} = (V_2^{(j)}, E_2^{(j)})$ označava udaljeno-regularan graf s

$n^{(j)}$ vrhova ($l + 1 \leq j \leq h$) i s presječnim nizom $\{k^{(j)}, b_1^{(j)}, \dots, b_{d-1}^{(j)}; c_1^{(j)}, \dots, c_d^{(j)}\}$, gdje je $d \geq 3$ i $l + 1 \leq j \leq h$. Ako je $G = G_1^{(1)} \cup G_1^{(2)} \cup \dots \cup G_1^{(l)} \cup G_2^{(l+1)} \cup \dots \cup G_2^{(h)}$ onda je $\bar{G}$ CDRG-graf s $n = n^{(1)} + \dots + n^{(l)} + n^{(l+1)} + \dots + n^{(h)}$ vrhova, valencije $k = n^{(1)} + \dots + n^{(l)} + n^{(l+1)} + \dots + n^{(h)} - k^{(1)} - 1$ i parametrom $\mu = n^{(1)} + \dots + n^{(l)} + n^{(l+1)} + \dots + n^{(h)} - 2k^{(1)} + a_1^{(1)}$ ako i samo ako je $k^{(1)} = k^{(2)} = \dots = k^{(l)} = k^{(l+1)} = \dots = k^{(h)}$ i $a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = \dots = a_1^{(l)} = \dots = a_1^{(h)}$.

Dokaz: Slično dokazu Propozicije 3.

Konstrukcija dvostruko regularnog grafa pomoću k -regularnog grafa

Propozicija 4: Neka je $G = (V, E)$ k -regularan graf s n vrhova, dijametra $d \geq 2$, s osobinom da postoji cijeli broj λ , takav da za svako $x \in V$ i $y \in \Gamma_1(x)$ vrijedi: $|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)| = \lambda$. Tada je $\bar{G}$ CDRG-graf s n vrhova, valencije $n - k - 1$ pri čemu je $\mu = n - 2k + \lambda$.

Dokaz: Neka je $x \in V$ proizvoljan vrh. Posmatrajmo razdaljinsku particiju vrha x u G . Uvedimo oznake: $\mathcal{M}_1 := \Gamma_1(x)$, $\mathcal{M}_2 := \Gamma_2(x)$, ..., $\mathcal{M}_d := \Gamma_d(x)$ posmatrano u grafu G . Do kraja dokaza posmatrat ćemo razdaljinsku particiju vrha x u $\bar{G}$. Očito je $\bar{\Gamma}_1(x) = \mathcal{M}_2 \cup \dots \cup \mathcal{M}_d$, $\bar{\Gamma}_2(x) = \mathcal{M}_1$. Jasno je da je $|\bar{\Gamma}_1(x)| = n - k - 1$.

Ako je $z \in \bar{\Gamma}_2(x)$, tada x i z nisu susjedni u $\bar{G}$, ali jesu u G , pa u G imaju λ zajedničkih susjeda. Otuda je: $|\bar{\Gamma}_1(z) \cap \bar{\Gamma}_1(x)| = n - 2k + \lambda$. Time je dokazana tvrdnja propozicije.

Na isti način se dokaže i:

Propozicija 5: Neka su $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, ..., $G_h = (V_h, E_h)$, $h \geq 0$, k -regularni grafovi s n_i ($1 \leq i \leq h$) vrhova respektivno i dijametra $d \geq 2$, te sa sljedećom osobinom: postoji cijeli broj λ takav da je za sve $x \in V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_h$ i $y \in \Gamma_1(x)$, $|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)| = \lambda$. Ako je $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_h$, tada je $\bar{G}$ CDRG-graf valencije $n_1 + n_2 + \dots + n_h - k - 1$ i $\mu = n_1 + n_2 + \dots + n_h - 2k + \lambda$.

Primjedba 1: Ako je $G = (V, E)$ nepovezan graf, tada je njegov spektar unija svih spektara njegovih komponenti povezanosti. Osim toga, ako je graf G k -regularan i ima svojstvene vrijednosti $k = \theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$, tada su svojstvene vrijednosti grafa $\bar{G}$: $n - k - 1, -1 - \theta_n, \dots, -1 - \theta_2$ (vidjeti [3]). Perron–Frobeniusov teorem neposredno implicira da ako je G povezan graf s $n \geq 2$ vrhova, onda najveća svojstvena vrijednost λ_{max} ima višestrukost 1 (vidjeti [1]). Zbog toga, ako je G k -regularan graf s l različitih svojstvenih vrijednosti i s osobinom da postoji cijeli broj λ , takav da za svako $x \in V$ i $y \in \Gamma_1(x)$ vrijedi: $|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)| = \lambda$, tada graf $\bar{G}$ ima tačno l različitih svojstvenih vrijednosti.

Zaključak

Kada se definiše neka nova klasa elemenata (skup) u matematici, matematičari prvo razmatraju egzistenciju takvih objekata i kardinalnu moć te klase (skupa), čime se opravdavaju dalja istraživanja vezana za novu klasu (skup). Proučavajući definicije regularnih, jako regularnih

i kvazi-jako regularnih grafova prirodno nam se nameće i definicija dvostruko regularnih grafova. Konstrukcije dvostruko regularnih grafova, rađene prema uzoru na konstrukcije kvazi-jako regularnih grafa (vidjeti [4]), a koje su provedene u ovom radu i u radu [8] pokazuju da ova klasa grafova ima beskonačno mnogo elemenata, te da zbog toga zaslužuje i pažnju. Primjeri dvostruko regularnih grafova koji su dobiveni u ovom radu mogu biti od velike koristi prilikom proučavanja osobina grafova kao što su: sparivanje, savršeno sparivanje i l -proširivost na ovoj klasi grafova.

Reference

1. [1] R. B. Bapat, Regular Graphs. In: Graphs and Matrices. Universitext. Springer, London, 2010., https://doi.org/10.1007/978-1-84882-981-7_6
2. [2] N. L. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1974, second edition 1993.
3. [3] A. E. Brouwer, W.H. Haemers, Spectra of graphs, Springer-Verlag, Berlin-New York, 2012; dostupno na internetu: <https://homepages.cwi.nl/~aeb/math/ipm/>
4. [4] F. Goldberg, On quasi-strongly regular graphs, Linear Multilinear Algebra, 54 (2006), 437 – 454
5. [5] E. R. van Dam, J. H. Kollen, H. Tanaka, Distance-Regular Graphs, *The electronic journal of combinatorics*, 2016., <https://doi.org/10.37236/4925>
6. [6] E. R. van Dam, Regular graphs with four eigenvalues, *Linear Algebra Appl.*, 226/228, (1995), 135-162
7. [7] Z. Xi-en, J. Wei, Complements of distance-regular graphs, *Journal of mathematics*, Vol. 36 (2016), Issue(2), 234-238
8. [8] Dž. Zečić, H. Alajbegović, S. Penjić, Konstrukcije dvostruko regularnih grafova, *Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Zenici*, No. 17 (2019), 268 – 276, ISSN 2637-2088, <https://ff.unze.ba/nauka-i-istrazivanje/zbornici-radova/>